



**АНОТОВАНИЙ ЗВІТ**  
**про виконану роботу у 2020 році в рамках реалізації проєкту**  
**із виконання наукових досліджень і розробок**  
**“Асимптотичні режими збурених випадкових блукань:**  
**на межі сучасної та класичної теорії ймовірностей”**

**Назва конкурсу:** “Підтримка досліджень провідних та молодих учених”  
**Реєстраційний номер Проєкту:** 2020.02/0014

**Підстава для реалізації Проєкту з виконання наукових досліджень і розробок** реєстраційний номер 2020.02/0014, назва “Асимптотичні режими збурених випадкових блукань: на межі сучасної та класичної теорії ймовірностей”

Рішення наукової ради Національного фонду досліджень України щодо визначення переможця конкурсу “Підтримка досліджень провідних та молодих учених” протокол від «16-17» вересня 2020 року № 21.

## **1. ЗАГАЛЬНА ІНФОРМАЦІЯ ПРО ПРОЄКТ**

Тривалість виконання Проєкту  
Початок – 03 листопада 2020 року;  
Закінчення – 2022 рік.

Загальна вартість Проєкту, грн.: 5 853 924

Вартість Проєкту по роках, грн.:

1-й рік 496782  
2-й рік 2505360  
3-й рік 2851782

## **2. ІНФОРМАЦІЯ ПРО ВИКОНАВЦІВ ПРОЄКТУ**

до виконання Проєкту було залучено 7 виконавців, з них:

доктори наук           3;  
кандидати наук       0;  
інші працівники       4.

### **3. ІНФОРМАЦІЯ ПРО ГРАНТООТРИМУВАЧА ТА ОРГАНІЗАЦІЮ(Ї) СУБВИКОНАВЦЯ(ІВ) ПРОЄКТУ**

#### **ГРАНТООТРИМУВАЧ**

Найменування підприємства/установи/організації (укр.)

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Організаційно-правова форма підприємства/установи/організації

Державна організація (установа, заклад, підприємство)

Підпорядкованість підприємства/установи/організації (укр.)

Міністерство освіти і науки України

Код ЄДРПОУ

02070944

Код(и) КВЕД

72.11; 72.19; 72.20; 85.42

Стратегічні напрями наукової діяльності (укр.)

Фундаментальні наукові дослідження з найважливіших проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу. Інформаційні та комунікаційні технології. Енергетика та енергоефективність. Рациональне природокористування. Науки про життя, нові технології профілактики та лікування найпоширеніших захворювань. Нові речовини і матеріали.

ПІБ керівника підприємства/установи/організації (укр.)

Леонід Васильович Губерський

Юридична адреса підприємства/установи/організації (укр.)

Україна, 01033, місто Київ, вул. Володимирська, 60

Фактична адреса (укр.)

Україна, 01601, місто Київ, вул. Володимирська, 64/13

Поштова адреса (укр.)

Україна, 01601, місто Київ, вул. Володимирська, 64/13

Телефон

+380442898691

Посилання на веб сторінку підприємства/установи/організації

univ.kiev.ua

### **4. ОПИС ПРОЄКТУ**

#### **4.1. Мета Проєкту (до 200 знаків)**

Метою проєкту є розробка нових елементів теорії глобально та локально збурених випадкових блукань, включаючи підхожі методи дослідження, з подальшим застосуванням отриманих результатів до аналізу деяких стохастичних моделей.

#### **4.2. Основні завдання Проєкту (до 400 знаків)**

Основними завданнями є дослідження асимптотичних властивостей збурених випадкових блукань, що виражаються в термінах різноманітних граничних теорем для розподілів, слабких та посиленних законів великих чисел та законів повторного логарифму.

#### **4.3. Детальний зміст Проєкту:**

- Сучасний стан проблеми (до 400 знаків)

Теорія відновлення для глобально збурених випадкових блукань є досить добре вивченої областю теорії ймовірностей. З поточною ситуацією (на 2016 рік) можна ознайомитися у монографії Іксанова (2016). У даному проєкті ми плануємо побудувати теорію відновлення для *ітерованих* глобально збурених ВБ, що є похідними процесами і раніше не вивчалися, та застосувати її до аналізу вкладених схем зайнятості у випадковому середовищі.

- Новизна Проєкту (до 400 знаків)

Асимптотична поведінка початкових та проміжних рівнів ітерованих глобально збурених випадкових блукань на деревах загальних гіллястих процесів раніше не досліджувалася. Асимптотична поведінка схем зайнятості біля кореня дерева загального гіллястого процесу (у початкових рівнях) та у рівнях з індексами порядку  $\log n$  (де  $n \in \text{число}$  куль, що розповсюджуються по дереву) була вивчена в роботах Gnedin та Iksanov (2020) та Bertoin (2008) відповідно.

- Методологія дослідження (до 400 знаків)

При дослідженні початкових та проміжних поколінь ітерованих глобально збурених випадкових блукань ми не можемо використовувати наявну асимптотичну теорію для загальних гіллястих процесів, а можемо оперувати лише засобами теорії відновлення та рекурсивною структурою гіллястих процесів. Для вивчення вкладених схем зайнятості у випадковому середовищі ми маємо розвинути ідеї, що базуються на аналізі ітерованих глобально збурених випадкових блукань.

## 5. ОТРИМАНІ НАУКОВІ АБО НАУКОВО-ТЕХНІЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ (до 2 сторінок) в поточному році/ в рамках реалізації Проєкту, зокрема:

1. Нові результати теорії відновлення для проміжних рівнів ітерованих глобально збурених випадкових блукань на деревах загальних гіллястих процесів. Встановлено аналоги елементарної теореми відновлення, теореми Блекуелла та ключової теореми відновлення, доведено посилений закон великих чисел для висоти дерева відповідного загального гіллястого процесу.

Більш детально, для ітерованих глобально збурених випадкових блукань, породжених вектором  $(\xi, \eta)$  встановлено дві елементарні теореми відновлення та ключову теорему відновлення для  $V_j(t)$  – середнього числа індивідуумів в  $j$ -му поколінні на інтервалі  $[0, t]$ .

**Теорема 1.1.2.** Припустимо, що  $m = E\xi \in (0, \infty)$ , та виконується одна з двох умов: (i)  $E\xi^r < \infty$  для деякого  $r \in (1, 2]$  або (ii)  $P\{\xi > t\} \sim bt^{-r}$  деякого  $r \in (1, 2)$  та  $b > 0$ . Також припустимо, що  $E(\eta \wedge t) = O(t^{2-r})$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тоді для будь-якої цілочисельної функції  $j = j(t)$ , що задовольняє  $j(t) = o(t^{(r-1)/2})$  при  $t \rightarrow \infty$ ,

$$V_j(t) \sim t^j / (m^j j!), \quad t \rightarrow \infty.$$

**Теорема 1.1.6.** Припустимо, що  $\xi$  має розподіл абсолютно неперервного типу,  $E\xi^3 < \infty$  та  $E\eta^2 < \infty$ . Тоді для будь-якої цілочисельної функції  $j = j(t)$ , що задовольняє  $j(t) = o(t^{2/3})$  при  $t \rightarrow \infty$ ,

$$V_j(t) \sim t^j \exp(\gamma_0 m j^2 / t) / (m^j j!), \quad t \rightarrow \infty,$$

де константа

$$\gamma_0 := \int_{[0, \infty)} d(V_1(y) - m^{-1}y) = \lim_{t \rightarrow \infty} (V_1(t) - m^{-1}t) = E\xi^2 / 2m^2 - E\eta / m$$

може бути додатною, від'ємною або рівною нулю.

**Теорема 1.1.9.** Нехай  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  безпосередньо інтегровна за Ріманом функція на  $[0, \infty)$ . Припустимо, що одна з умов (а) або (б) виконується:

(а) розподіл  $\xi$  неграатчастий, та умови теореми 1.1.2 виконуються для деякого  $r \in (1, 2]$  (або деякого  $r \in (1, 2)$ ) та  $j(t) = o(t^{(r-1)/2})$  при  $t \rightarrow \infty$ ;

(б) виконуються умови теореми 1.1.6 та  $j(t) = o(t^{2/3})$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Тоді

$$(f * V_j)(t) = \int_{[0, t]} f(t-y) dV_j(y) \sim (1/m \int_{[0, \infty)} f(y) dy) V_{j-1}(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

При цьому у правій частині  $V_{j-1}(t)$  можна замінити на  $t^{j-1} / (m^{j-1} (j-1)!)$  у випадку (а), або на  $t^{j-1} / (m^{j-1} (j-1)!) \exp(\gamma_0 m j^2 / t)$  у випадку (б).

У тій же постановці, що і вище, доведено граничну теорему для  $N_j(t)$  – числа індивідумів в  $j$ -му поколінні на інтервалі  $[0, t]$ .

**Теорема 2.3.2.** Припустимо, що  $s^2 = \text{Var } \xi \in (0, \infty)$  та  $E\eta < \infty$ . Нехай  $j(t)$  – будь-яка додатна функція, що задовольняє  $j(t) \rightarrow \infty$  та  $j(t) = o(t^{1/2})$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тоді при  $t \rightarrow \infty$

$$\left( ([j(t)]^{1/2} ([j(t)u] - 1)! ) / (s^2 m^{-2[j(t)u]-1} t^{2[bj(t)u]-1})^{1/2} \left( \sum_{r \geq 1} V_{[j(t)u]-1}(t - T_r) \mathbf{1}_{\{T_r \leq t\}} - V_{[j(t)u]}(t) \right) \right)_{u>0} \\ \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \left( \int_{[0, \infty)} e^{-uy} dB(y) \right)_{u>0},$$

де  $(B(v))_{v \geq 0}$  – стандартний броунівський рух.

2. Нові граничні теореми для проміжних рівнів вкладених схем зайнятості у випадковому середовищі.

У вкладеній схемі зайнятості у випадковому середовищі, що визначається вектором випадкових ймовірностей  $P$ , позначимо через  $K_n(j)$  число зайнятих комірок в  $j$ -му поколінні, де  $n \in \mathbb{N}$  є числом куль, що розподіляються. Для  $j \in \mathbb{N}$  та  $t > 0$  позначимо через  $\rho_j(t)$  число ймовірностей у  $j$ -му поколінні, що не перевищують  $1/t$ .

**Теорема 2.2.1.** Припустимо, що ймовірності  $P$  задано формулою

$$P_r := W_1 W_2 \cdot \dots \cdot W_{r-1} (1 - W_r), \quad r \in \mathbb{N},$$

де  $W_1, W_2, \dots$  – незалежні копії випадкової величини  $W$ , що набуває значень у  $(0, 1)$ , та що виконуються умови

$$\sigma^2 := \text{Var}(\log W) \in (0, \infty) \text{ та } E|\log(1 - W)| < \infty.$$

Нехай  $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$  є послідовністю додатних чисел, що задовольняє умови  $j_n \rightarrow \infty$  та  $j_n = o((\log n)^{1/2})$  при  $n \rightarrow \infty$ . Має місце така гранична теорема: при  $n \rightarrow \infty$

$$\left( ([j_n]^{1/2} ([j_n u] - 1)! (K_n([j_n u]) - E\rho_{[j_n u]}(n)) / ((\sigma^2 \mu^{-2[j_n u]-1} (\log n)^{2[j_n u]-1})^{1/2}) \right)_{u>0} \\ \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \left( \int_{[0, \infty)} e^{-uy} dB(y) \right)_{u>0},$$

де  $(B(v))_{v \geq 0}$  – стандартний броунівський рух, та  $\mu = E|\log W| < \infty$ .

### 5.1. Опис наукових або науково-технічних результатів, отриманих в рамках виконання Проєкту (із зазначенням їх якісних та кількісних (технічних) характеристик)

За результатами досліджень, проведених на першому етапі проєкту подано до друку дві статті у періодичні видання, віднесені до другого (Q2) та першого (Q1) квантиля за класифікацією Journal Citation Reports:

[1] Bohun, V. Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: intermediate generations [Text] / V. Bohun, A. Iksanov, A. Marynych та B. Rashytov // подана до друку в Advances in Applied Probability.

[2] Iksanov, A. On intermediate levels of nested occupancy scheme in random environment generated by stick-breaking II [Text] / A. Iksanov, A. Marynych та I. Samoilenko // подана до друку в Bernoulli.

### 5.2. За наявності науково-технічної продукції обґрунтування її переваг у порівнянні з існуючими аналогами

### 5.3. Практична цінність отриманих результатів реалізації Проєкту для економіки та суспільства (стосується проєктів, що передбачають проведення прикладних наукових досліджень і науково-технічних розробок)

**5.4. Опис шляхів та способів подальшого використання результатів виконання Проєкту в суспільній практиці.**

- Вкладені схеми зайнятості у випадковому середовищі є математичною моделлю, що зображує еволюцію генеалогічної структури деякої популяції з плином часу (Iksanov та Gnedin (2020)), а тому відповідні результати можуть знайти застосування в математичній біології.
- Результати, отримані під час першого етапу, стануть частиною курсу лекцій зі збурених випадкових блукань, що планується читати магістрам та/або аспірантам Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Примітка: Анотований звіт не повинен містити відомостей, заборонених до відкритого опублікування

**Науковий керівник Проєкту**  
завідувач кафедри дослідження  
операцій Київського національного  
університету імені Тараса Шевченка  
Іксанов Олександр Маратович

  
\_\_\_\_\_  
(підпис)