ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
проф. Жилінська О.І.

(підпис)
М.П.

АНОТОВАНИЙ ЗВІТ
про виконану роботу у 2020 році в рамках реалізації проєкту
із виконання наукових досліджень і розробок

Найкраще наближення поліномами з обмеженнями і без обмежень та системи підпросторів

Назва конкурсу: **Підтримка досліджень провідних та молодих учених**
Реєстраційний номер Проєкту: 2020.02/0155

Підстава для реалізації Проєкту з виконання наукових досліджень і розробок (реєстраційний номер та назва Проєкту) 2020.02/0155, Найкраще наближення поліномами з обмеженнями і без обмежень та системи підпросторів.

Рішення наукової ради Національного фонду досліджень України щодо визначення переможця конкурсу Підтримка досліджень провідних та молодих учених.
протокол від «16-17« вересня 2020 року № 21

1. ЗАГАЛЬНА ІНФОРМАЦІЯ ПРО ПРОЄКТ

Тривалість виконання Проєкту
Початок – 4 листопада 2020 року;
Закінчення – 2021 рік.

Загальна вартість Проєкту, грн. 1644840 (один мільйон шістсот сорок чотири тисячі вісімсот сорок грн.. 00 копійок)

Вартість Проєкту по роках, грн.:
1-й рік 258,110 (двісті п'ятдесят вісім тисяч сто десять гривень 00 копійок)
2-й рік 1386730 (один мільйон триста вісімдесят шість тисяч сімсот тридцять грн.. 00 копійок)

2. ІНФОРМАЦІЯ ПРО ВИКОНАВЦІВ ПРОЄКТУ

до виконання Проєкту залучено 5 виконавців, з них:
доктори наук 1;
кандидати наук 2;
інші працівники 2.

3. ІНФОРМАЦІЯ ПРО ГРАНТООТРИМУВАЧА ТА ОРГАНІЗАЦІЮ(Ї) СУБВИКОНАВЦЯ(ІВ) ПРОЄКТУ:
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 60, м. Київ, Київська обл., 01033, Україна. Тел..: 044-239-31-41

4. ОПИС ПРОЄКТУ

4.1. Мета Проєкту Мета проєкту відповідає назві конкурсу - підтримка досліджень провідних та, в першу чергу, молодих вчених. Серед виконавців проєкту – один із найкращих випускників КНУ імені Тараса Шевченка останніх років, один із небагатьох кращих випускників, які залишились в Україні. Напрямками досліджень є теорія формозберігаючого наближення, конструктивна характеристика і класифікація функцій, теорія систем підпросторів гільбертових і банахових просторів.

4.2. Основні завдання Проєкту Довести, що оцінки наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами у класичній формі є хибними при всіх $q>2$ та всіх порядках модулей гладкості і похідних, на відміну від випадків $q=1,2$. Посилити та/або узагальнити відомі оцінки поточкового наближення функцій алгебраїчними поліномами з умовами інтерполяції Ерміта, зокрема у довільному наборі вузлів. Довести точність отриманих оцінок. Дослідити переваги нещодавно введеної класифікації інтегровних функції перед її аналогами; властивість оберненого найкращого наближення систем замкнених підпросторів гільбертового простору, визначити і дослідити числову характеристику цієї властивості. Знайти умови, за яких система маргінальних підпросторів, породжених дискретними випадковими величинами із певного класу, володіє властивістю оберненого найкращого наближення. Дослідити питання про замкненість і максимальність суми певних підпросторів простору операторів, які діють із одного банахового простору в інший.

4.3. Детальний зміст Проєкту:

- Сучасний стан проблеми (до 2 сторінок) . Теорія формозберігаючого наближення (Shape Preserving Approximation, SPA) виникла півстоліття тому. Мова йде про наближення монотонних функцій монотонними поліномами ($q=1$), опуклих функцій опуклими поліномами ($q=2$), q-опуклих функцій q-опуклими поліномами. Перші нетривіальні результати отримали Лоренц та Целлер. Вперше кусковомонотонне наближення розглянули Ньюман та його учні. Врешті, за останні 30 років побудована практично вичерпна теорія формозберігаючого наближення неперіодичних функцій в роботах названих вище вчених, а також Бітсона, Ву, Венса, Гілевича, Гонски, Левіатана, Мхаскара, Профіта, , Роулера, Шведова, Ху, Цу та інших математиків із провідних університетів Америки, Європи, Океанії, Ізраїля та Китая. Потужний внесок в теорію зробили учні керівника проекту: Бондаренко, Вязовська, Дзюбенко, Копотун, Примак, Радченко та учасниця проекту Петрова. Маючи значний об'єм методів фомозберігаючого наближення, вдалось дослідити кусково - монотонне наближення періодичних функцій. Наша мета – дослідити кусково - опукле наближення та кусково – q-опукле наближення періодичних функцій. Актуальність цієї задачі була підкреслена професорами Конягіним (нині академік РАН) та Демидовичем. Складність задачі пов'язана, зокрема, із тою простою обставиною, що віднімання (додаваня) лінійної функції не впливає на опуклість, але впливає на періодичність. Існує великий інтерес до оцінок типу Лоренца-Теляковського-Гопенгауза для проблем, що стосуються: одночасного наближення функції та її похідних (Андрієвський, Блатт, Дальхаус, Копотун, Лі), (узагальнених) дискретних лінійних поліноміальних операторів, що задовольняють цьому типу оцінок (Брудний, Кілгор Престін, Шабадош), поліноміального наближення з додатковими умовами інтерполяції (Вертеші, Хі, Цу), або з додатковими умовами інтерполяції Ерміта (Андрієвський, Блатт, Кілгор Престін, Тригуб). Прийшов час посилити та/або узагальнити відповідні поточкові інтерполяційні наближення многочленами. У 2015 керівником проекту разом з Левіатаном та Копотуном введена нова класифікація неперіодичних інтегровних функцій, яка, дозволила отримати повний аналог класичної конструктивної характеристики періодичних інтегровних функцій. Природно, є потреба подальшого дослідження нової класифікації та її порівняння з класифікацією Потапова, дослідженої в роботах учасниці проекту О.В.Моторної та співавторів. Властивість оберненого найкращого наближення. Слідуючи (P.L. Combettes, N.N. Reyes, Functions with prescribed best linear approximations, Journal of Approximation Theory, 162 (2010), 1095-1116) скажемо, що система замкнених підпросторів гільбертового простору H володіє властивістю оберненого найкращого наближення (inverse best approximation property, IBAP) якщо для довільного набору елементів, по одному з кожного підпростора, існує елемент простору H, ортогональні проекції якого на ці підпростори співпадають з заданими елементами. Мотивація P.L. Combettes-a i N.N. Reyes-a для вивчення IBAP наступна. Класичною задачею, яка виникає в таких областях як гармонічний аналіз, оптика, та теорія сигналів є задача знаходження функції $x \in L^2(R^N)$ з заданими значеннями на підмножині простору (або часу), перетворення Фур'є якої також має задані значення на заданій підмножині $R\ N$(див. посилання у вступі наведеної вище статті). В геометричних термінах ця задача зводиться до задачі знаходження функції яка має задані елементи найкращого наближення двома замкненими підпросторами простору $L^2(R^N)$. Більш загально, широкий спектр задач прикладної математики можуть бути сформульовані наступним чином: для заданих n замкнених підпросторів $H_i, 1 \leq i \leq n$ (дійсного або комплексного) гільбертового простору H потрібно знайти елемент $x \in H$ такий, що для всіх i = 1,2, . . . , n $P_i x = x_i$, де P_i − ортогональний проектор на H_i і $x_i \in H_i$ для всіх i = 1,2, . . . , n. У зв'язку з цією задачею центральним питанням є питання про існування розв'язку незалежно від вибору елементів $x_1, x_2, \dots, x_n$.

- Замкненість суми замкнених підпросторів банахового простору. Системи підпросторів, для яких питання про замкненість їхньої суми є дуже важливим, виникають у різних областях математики, наприклад, у теоретичній томографії і теорії рідж-функцій (плоских хвиль), теорії вейвлетів і кратно масштабному аналізі, статистиці, апроксимаційних алгоритмах у гільбертових і банахових просторах і, зокрема, в методах поперемінних проекцій, задачі знаходження елемента гільбертового простору з заданими ортогональними проекціями на скінченне число підпросторів, теорії банахових алгебр, теорії операторних алгебр, задачах квадратичної оптимізації в гільбертовому просторі, теорії μ-псевдо майже періодичних функцій (або послідовностей) і μ-псевдо майже автоморфних функцій (або послідовностей) (відповідні посилання можна знайти у вступі статті Ivan Feshchenko, When is the sum of complemented subspaces complemented?, Studia Mathematica (2020) Vol. 252, No. 1, p. 1-26.).

- Новизна Проєкту (до 1 сторінки). В області наближення з обмеженнями, зокрема в області формозберігаючого наближення періодичних функцій відомо, що при кусково-монотонному наближенні (q=1) тригонометричними поліномами в переважному числі випадків справедливі класичні за формою оцінки типу Джексона. Очікується, що така ж ситуація має місце і в коопуклому наближенні (q=2) періодичних функцій. З іншого боку ми плануємо побудувати контрприклади, що свідчать про нове явище: при q-коопуклому наближенні, q>2, періодичних функцій в усіх випадках класичні оцінки типу Джексона є хибними. В області наближення без обмежень планується розробити і обґрунтувати новий підхід до так званих інтерполяційних поточкових оцінок наближення алгебраїчними поліномами. А саме, на відміну від результатів про існування інтерполяційних алгебраїчних поліномів, що забезпечують відповідні порядки наближення, планується показати, що всякий інтерполяційний поліном забезпечує відповідну оцінку. Новою ідеєю є також застосування опублікованої нами у 2019 році оцінки розділеної різниці Лагранжа – Ерміта, у довільному фіксованому наборі вузлів інтерполяції. У 2015 році Копотун, Левіатан та керівник проекту побудували нову класифікацію інтегровних функцій, яка поширена на випадок ваг Якобі. Зрозуміло, ця нова конструкція потребує подальшого вивчення, зокрема треба довести властивості характеристик гладкості при найзагальніших умовах на вагу Якобі. Разом з цією новою класифікація існує класифікація Потапова, де експертом є учасниця проекту Моторна. До цього часу ці класифікації не порівнювались. Новим дослідженням буде також порівняння відповідних вагових характеристик гладкості інтегровних функцій, з вагою Якобі. IBAP систем підпросторів гільбертового простору вивчалась лише у декількох роботах. Однією з цілей проєкту є глибше вивчення IBAP, зокрема, ми визначимо і дослідимо чисельну характеристику IBAP. Також ми отримаємо як достатні, так і необхідні умови для того, щоб система маргінальних підпросторів, породжених випадковими величинами із певного класу, володіла IBAP (у нашому випадку це буде рівносильно замкненості суми маргінальних підпросторів). У попередників були достатні умови для замкненості суми маргінальних підпросторів. Ми ж одержимо не тільки достатні, а й і необхідні умови.

- Методологія дослідження (до 2 сторінок). Зрозуміло, для доведення очікуваних результатів будуть застосовані як класичні методи теорії функцій і функціонального аналізу, так і методи, розроблені виконавцями проекту. Особливу увагу буде приділено вдосконаленню відомих методів та створенню нових. Для отримання прямих теорем формозберігаючого наближення буде використано метод ДеВора розшарування похідної на «малу» і «велику». При цьому при побудові допоміжного сплайна в методі ДеВора було використання розбиття на однакові відрізки. Свого часу прорив в теорії відбувся завдяки застосуванню керівником проекту не рівномірного, а чебишевського розбиття, і побудові відповідних методів. Успіху також сприяло спостереження, що ядро, використане ДеВором та Ю для монотонного наближення є частинним випадком уявної частини ядра Дзядика наближення ядра Коші в областях комплексної площини. Таким чином, на відміну від наближення без обмежень, де в порядку складності рух відбувався в напрямку періодичні функції – неперіодичні функції – функції комплексної змінної, у формозберігаючому наближенні порядок складності виявився протилежним, тобто періодичний випадок виявився складнішими неперіодичного. Зокрема, справа в тому, що, за виключенням сталих, періодичні функції не бувають монотонними, опуклими, …, вони бувають кусково-монотонними, кусково-опуклими, … . Щоб застосувати вказані методи до періодичних функцій, треба знову пристосувати їх до рівномірного розбиття, Але тут виникає суттєва проблема, пов’язана з періодичністю, А саме, методи наближення, скажімо, опуклої функції опуклими алгебраїчними поліномами, як правило використовують додавання та віднімання лінійної функції, що не впливає на опуклість. З іншого боку, в періодичному випадку така операція «псує» періодичність, і отже потребує створення, нових методів, або принаймні суттєвого вдосконалення відомих методів. Починаючи з робіт Лоренца та Целлера, для побудови контрприкладів у формозберігаючому наближенні алгебраїчними поліномами, використовують нерівності для похідної алгебраїчного полінома, а саме нерівності Маркова, Бернштейна, Дзядика. В періодичному випадку природно застосувати нерівність Бернштейна для похідної тригонометричного полінома, але насправді потрібна нерівність, яка враховує норму не по періоду, а по його частині. Така нерівність є – це нерівність Привалова, але вона гарантує лише існування певної сталої, взагалі кажучи, не контрольованої. Отже виникає необхідність оцінювання відповідних сталих. Поза тим, виникає необхідність отримання аналога результата Бернштейна про наближення функції |x|. Нарешті, планується узагальнити побудову ідеальних сплайнів Ойлера. Розроблена керівником проекту конструкція для розв’язку задачі Стечкіна про побудову функції із заданим модулем гладкості може бути застосована до доведення точності класичних оцінок наближення без обмежень алгебраїчними поліномами з інтерполяцією на кінцях відрізка. Розвинений автором проекту апарат застосування розділених різниць уможливить поширення вказаних класичних результатів на інтерполяцію не тільки в кінцях відрізка, а і в будь-якому фіксованому наборі точок. Планується об’єднання методів апроксимації, розроблених учасниками проекту. Зокрема, порівняння методів отримання конструктивної характеристики через класифікацію Потапова, розвинених учасницею проекту Моторною, з методами отримання конструктивної характеристики через класифікацію, нещодавно введену керівником проекту Шевчуком. Планується також застосування методів вагової апроксимації, зокрема, з вагою Якобі. Для вивчення задач, пов’язаних із системами підпросторів ми будемо використовувати методи функціонального аналізу і теорії операторів. Для отримання умов, за яких система маргінальних підпросторів, породжених дискретними випадковими величинами із певного класу, володіє IBAP буде використане поняття базису Рісса. У своїй статті (P.L. Combettes, N.N. Reyes, Functions with prescribed best linear approximations, Journal of Approximation Theory, 162 (2010), 1095-1116) P.L. Combettes і N.N. Reyes навели різні необхідні і достатні умови для того, щоб система підпросторів володіла IBAP, розглянули питання про знаходження розв’язку задачі оберненого найкращого наближення з найменшою нормою, а також застосували отримані результати до систем інтегральних рівнянь, “усічених” моментних задач, гармонічного аналізу, вейвлет-фреймів і відновлення сигналів. Раніше ми одержали різні необхідні і достатні умови (відмінні від умов Combettes-а і Reyesа) для того, щоб система підпросторів володіла IBAP. Зокрема, доведено, що система замкнених підпросторів гільбертового простору H володіє IBAP тоді і тільки тоді, коли ці підпростори лінійно незалежні і їхня сума замкнена в H.

- Інформація про наявну матеріально-технічну базу, обладнання та устаткування, необхідні для виконання Проєкту (до 1 сторінки) Виконання проекту не вимагає обладнання та устаткування, крім ПК. Тобто матеріально-технічна база достатня, але бажано усучаснити ПК.

- Очікувані результати виконання Проєкту (до 1 сторінки):

а) Опис наукової або науково-технічної продукції (за її наявності), яка буде створена в результаті виконання Проєкту (із зазначенням її очікуваних якісних та кількісних (технічних) характеристик).
За результатами кожного етапу, крім першого, планується публікація або подання до друку наукової статті у журналі з високим квартілем, тобто всього принаймні п’ять наукових статей. Під час виконання проєкту учасниця проєкту І.Л.Петрова захистить дисертацію на ступінь доктора філософії (PhD).
Ми плануємо а1) Довести, що оцінки наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами у класичній формі є хибними при всіх $q>2$ та всіх порядках модулей гладкості і похідних, на відміну від випадків $q=1,2$.
а2) Посилити та/або узагальнити відомі оцінки поточкового наближення функцій алгебраїчними поліномами з умовами інтерполяції Ерміта, зокрема у довільному наборі вузлів. Довести точність за порядком отриманих оцінок.
а3) Встановити нові властивості нещодавно введених модулів гладкості, порівняти їх з властивостями модулів гладкості Потапова. Дослідити відповідну вагову апроксимацію.
а4) Дослідити властивість оберненого найкращого наближення систем замкнених підпросторів гільбертового простору, визначити і дослідити числову характеристику цієї властивості.
а5) Знайти умови, за яких система маргінальних підпросторів, породжених дискретними випадковими величинами із певного класу, має властивість оберненого найкращого наближення.
а6) Дослідити питання про замкненість і максимальність суми певних підпросторів простору операторів, які діють із одного банахового простору в інший.

б) Обґрунтування переваг очікуваної наукової або науково-технічної продукції (за її наявності) у порівнянні з існуючими аналогами на підставі порівняльного аналізу.
б1) Відомі лише позитивні результаті, і лише у випадку $q=1$.
б2) На відміну від результатів про існування поліномів, планується показати, що всякий інтерполяційний поліном забезпечує відповідну оцінку, і що вона непокращувана.
б3) Нові модулі гладкості мають ряд переваг у порівнянні з раніше відомими.
б4) Ми визначимо числову характеристику властивості оберненого найкращого наближення (вона буде тісно пов’язана із числовою характеристикою послідовностей Рісса-Фішера) і дослідимо її. За допомогою цієї характеристики ми встановимо зв’язок між IBAP системи підпросторів і IBAP її підсистем, які складаються з k підпросторів.
б5) У попередників були достатні умови для замкненості суми маргінальних підпросторів. Ми одержимо як достатні, так і необхідні умови.
б6) По цій тематиці відомий негативний результат. Ми одержимо позитивні результати (за певних умов сума певних підпросторів простору операторів є максимальною, а тоді є і замкненою).

в) Обґрунтування практичної цінності запланованих результатів реалізації Проєкту для економіки та суспільства (стосується проєктів, що передбачають проведення прикладних наукових досліджень і науково-технічних розробок). Проєкт не передбачає проведення прикладних наукових досліджень і науково-технічних розробок.

- Опис шляхів та способів подальшого використання результатів виконання Проєкту в суспільній практиці (до 1 сторінки).
У проєкті будуть отримані як необхідні, так і достатні умови для того, щоб система маргінальних підпросторів, породжених дискретними випадковими величинами із певного класу, володіла

IBAP (властивістю оберненого найкращого наближення). Нагадаємо, що система замкнених підпросторів гільбертового простору володіє IBAP тоді і тільки тоді, коли ця система лінійно незалежна і сума підпросторів системи замкнена. Питання про замкненість суми маргінальних підпросторів, породжених випадковими величинами виникає у статистиці, наприклад, в

- □^{2} -версії адитивного моделювання (див. T.J. Hastie, R.J. Tibshirani, Generalized Additive Models, 1990, Chapman and Hall, підрозділ 5.2). Також зауважимо, що оператор P у рівнянні (5.5) на сторінці 108 цієї книги є операторною матрицею Грама системи підпросторів □$_1$,…, □$_□$ Виникає природнє питання: коли цей оператор є ізоморфізмом? Відповідь: коли система підпросторів □$_1$,…, □$_□$ володіє IBAP.
- в методі ACE (alternating conditional expectations) (див. L. Breiman, J.H. Friedman, Estimating optimal transformations for multiple regression and correlation, Journal of the American Statistical Association (1985), Vol. 80, p. 580-598.).

Результати виконання проєкту допоможуть краще зрозуміти границі застосовності адитивного моделювання і ACE. Як відомо, однією із причин створення теорії формозберігаючого наближення була потреба автомобільної промисловості США. На шляхи і способи подальшого використання результатів проєкту в інших галузях техніки вказують наступні статті, в яких цитуються і використовуються результати авторів проєкту. Dai, M., Loguinov, D., Radha, H.M., Rate-distortion analysis and quality control in scalable Internet streaming, IEEE Transactions on Multimedia, 8 (2006), N6, 1135-1146. Tian, D.-G., Huang, Y.-Q., Computation of channel capacity based on self-concordant functions, Journal of Electrical and Computer Engineering, (2012), Article ID 318946, 9 p. Kevin Murray, Samuel Muller, Berwin A. Turlach, Fast and flexible methods for monotone polynomial fitting, Journal of Statistical Computation and Simulation 86(15} (February 2016):1-21. Simon Foucart, Vladlena Powers, Constrained approximation by semidefinite programming, IMA Journal of Numerical Analysis, 37 (April 2017), N2, 1066–1085, та ін.

5. ОТРИМАНІ НАУКОВІ АБО НАУКОВО-ТЕХНІЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ (до 2 сторінок) в поточному році/ в рамках реалізації Проєкту, зокрема:

5.1. Опис наукових або науково-технічних результатів, отриманих в рамках виконання Проєкту (із зазначенням їх якісних та кількісних (технічних) характеристик)

Отримано різні формули (відмінні від формул P.L. Combettes-а і N.N. Reyes-а) для розв’язку задачі оберненого найкращого наближення з найменшою нормою, встановлено зв’язок між властивістю оберненого найкращого наближення (inverse best approximation property, IBAP) і сім’ями Рісса, доведено, що системи кореневих підпросторів неперервних лінійних операторів володіють IBAP, доведено, що якщо система замкнених підпросторів гільбертового простору володіє IBAP, то вона є системою власних підпросторів деякого неперервного лінійного оператора, отримано нові результати про стійкість IBAP.

Отримано достатню умову для того, щоб система маргінальних підпросторів, породжених дискретними випадковими величинами із певного класу, володіла IBAP. Отримано необхідну умову для того, щоб система маргінальних підпросторів, породжених дискретними випадковими величинами із певного класу, володіла IBAP.

За результатами досліджень в рамках проєкту подано до друку статтю K. A. Kopotun, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, Exact order of pointwise estimates for polynomial approximation with Hermite interpolation, Journal of Approximation Theory (Q2 за 2019 рік).

5.2. За наявності науково-технічної продукції обґрунтування її переваг у порівнянні з існуючими аналогами

5.3. Практична цінність отриманих результатів реалізації Проєкту для економіки та суспільства (стосується проєктів, що передбачають проведення прикладних наукових досліджень і науково-технічних розробок)

5.4. Опис шляхів та способів подальшого використання результатів виконання Проєкту в суспільній практиці.

У проєкті отримано як необхідні, так і достатні умови для того, щоб система маргінальних підпросторів, породжених дискретними випадковими величинами із певного класу, володіла IBAP (властивістю оберненого найкращого наближення). Нагадаємо, що система замкнених підпросторів гільбертового простору володіє IBAP тоді і тільки тоді, коли ця система лінійно незалежна і сума підпросторів системи замкнена. Питання про замкненість суми маргінальних підпросторів, породжених випадковими величинами виникає у статистиці, наприклад, в

● $\square^2$ -версії адитивного моделювання (див. T.J. Hastie, R.J. Tibshirani, Generalized Additive Models, 1990, Chapman and Hall, підрозділ 5.2). Також зауважимо, що оператор P у рівнянні (5.5) на сторінці 108 цієї книги є операторною матрицею Грама системи підпросторів $\square_1, \ldots, \square_{\square}$. Виникає природнє питання: коли цей оператор є ізоморфізмом? Відповідь: коли система підпросторів $\square_1, \ldots, \square_{\square}$ володіє IBAP.

● в методі ACE (alternating conditional expectations) (див. L. Breiman, J.H. Friedman, Estimating optimal transformations for multiple regression and correlation, Journal of the American Statistical Association (1985), Vol. 80, p. 580-598.).

Результати виконання проєкту допоможуть краще зрозуміти границі застосовності адитивного моделювання і ACE.

Як відомо, однією із причин створення теорії формозберігаючого наближення була потреба автомобільної промисловості США. На шляхи і способи подальшого використання результатів проєкту в інших галузях техніки вказують наступні статті, в яких цитуються і використовуються результати авторів проєкту. Dai, M., Loguinov, D., Radha, H.M., Rate-distortion analysis and quality control in scalable Internet streaming, IEEE Transactions on Multimedia, 8 (2006), N6, 1135-1146. Tian, D.-G., Huang, Y.-Q., Computation of channel capacity based on self-concordant functions, Journal of Electrical and Computer Engineering, (2012), Article ID 318946, 9 p. Kevin Murray, Samuel Muller, Berwin A. Turlach, Fast and flexible methods for monotone polynomial fitting, Journal of Statistical Computation and Simulation 86(15} (February 2016):1-21. Simon Foucart, Vladlena Powers, Constrained approximation by semidefinite programming, IMA Journal of Numerical Analysis, 37 (April 2017), N2, 1066–1085, та ін.

Примітка: Анотований звіт не повинен містити відомостей, заборонених до відкритого опублікування

Науковий керівник Проєкту
Завідувач кафедри математичного аналізу
І. О. Шевчук

____
(підпис)