ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
професор Ганна ТОЛСТАНОВА

_____
(підпис)
М.П.

АНОТОВАНИЙ ЗВІТ
про виконану роботу у 2021 році в рамках реалізації проєкту
із виконання наукових досліджень і розробок
Оцінювання параметрів, перевірка гіпотез та прогнозування
в актуальних стохастичних моделях
(назва Проєкту)

Назва конкурсу: Підтримка досліджень провідних та молодих учених
Реєстраційний номер Проєкту: : 2020.02/0026

Підстава для реалізації Проєкту з виконання наукових досліджень і розробок (реєстраційний номер та назва Проєкту) 2020.02/0026 «Оцінювання параметрів, перевірка гіпотез та прогнозування в актуальних стохастичних моделях»

Рішення наукової ради Національного фонду досліджень України щодо визначення переможця конкурсу «Підтримка досліджень провідних та молодих учених» (назва конкурсу)
протокол від «16-17» вересня 2020 року № 21.

1. ЗАГАЛЬНА ІНФОРМАЦІЯ ПРО ПРОЄКТ

Тривалість виконання Проєкту
Початок – 05.11.2020;
Закінчення – 2022 рік.

Загальна вартість Проєкту, грн. 2037120 грн.

Вартість Проєкту по роках, грн.:
1-й рік 264260 грн.
2-й рік 904600 грн.
3-й рік 868260 грн.

2. ІНФОРМАЦІЯ ПРО ВИКОНАВЦІВ ПРОЄКТУ

до виконання Проєкту залучено 9 виконавців, з них:
доктори наук 3;
кандидати наук 2;
інші працівники 4.

3. ІНФОРМАЦІЯ ПРО ГРАНТООТРИМУВАЧА ТА ОРГАНІЗАЦІЮ(Ї) СУБВИКОНАВЦЯ(ІВ) ПРОЄКТУ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Організаційно-правова форма: Державна організація (установа, заклад, підприємство)
Підпорядкованість: Міністерство освіти і науки України
Код ЄДРПОУ: 02070944
Коди КВЕД: 72.11, 72.19, 72.20
ПІБ керівника підприємства/установи/організації: Бугров Володимир Анатолійович
Юридична адреса: вул. Володимирська, 60, м. Київ, Київська обл., 01033, Україна.
Поштова адреса: Україна, 01601, місто Київ, вул. Володимирська, 64/13
Фактична адреса: Україна, 01601, місто Київ, вул. Володимирська, 64/13
Телефон: 0442393141
Адреса електронної пошти: office.chief@univ.net.ua
Посилання на веб сторінку: https://knu.ua/

4. ОПИС ПРОЄКТУ

4.1. **Мета Проєкту** (до 200 знаків)

Дослідження статистичних задач для широкого класу стохастичних моделей як з дискретним, так і з неперервним часом та їх застосування у фінансовій та актуарній математиці, біології та фізиці.

4.2. **Основні завдання Проєкту** (до 400 знаків)

Проєктом передбачено поширення існуючих та розробка нових методів для побудови оцінок невідомих параметрів в різноманітних моделях регресії та стохастичних дифузійних моделях, які породжуються вінерівським процесом та/або дробовим броунівським рухом, і застосування розроблених підходів до вивчення процесів, які розглядаються у фінансовій та актуарній математиці, біології, фізиці.

4.3. **Детальний зміст Проєкту:**

- Сучасний стан проблеми (до 400 знаків)

Моделі регресії, які планується розглянути, вивчалися багатьма вченими, але їх методи часто носять суто емпіричний характер без теоретичного обґрунтування, а деякі результати є неефективними та потребують удосконалення. Дифузійним моделям присвячено сотні статей, проте їх параметри, як правило, оцінюють окремо, а теорія для складних дробових процесів знаходиться ще на початковій стадії розробки.

- Новизна Проєкту (до 400 знаків)

При оцінюванні параметрів регресії буде застосовано нові методи та підходи, які зможуть врахувати додаткові похибки у вимірюваннях та мають покращити якість отриманих оцінок. В дифузійних моделях буде проведено комплексне одночасне оцінювання коефіцієнтів. Буде вперше розглянуто параметричне оцінювання в моделях з субординованими процесами, в яких час або прискорюється або, навпаки, уповільнюється.

- Методологія дослідження (до 400 знаків)

Дослідження проводитимуться методами стохастичного аналізу, теорії випадкових процесів, математичної статистики, теорії ймовірностей, функціонального аналізу, теорії рівнянь з

частинними похідними, дробового аналізу. Буде розроблено нові та вдосконалено існуючі математичні і статистичні методи, активно використовуватимуться методи комп'ютерного моделювання випадкових процесів.

5. ОТРИМАНІ НАУКОВІ АБО НАУКОВО-ТЕХНІЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ (до 2 сторінок) в поточному році/ в рамках реалізації Проєкту, зокрема:

5.1. Опис наукових або науково-технічних результатів, отриманих в рамках виконання Проєкту (із зазначенням їх якісних та кількісних (технічних) характеристик)

1. Розглянуто процес Кокса – Інгерсолла – Росса зі стандартним броунівським рухом, що задовольняє стохастичне диференціальне рівняння $dr_t = (a - b\, r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$, де a, bта σ – додатні дійсні числа. Побудовано оцінки для невідомих параметрів зсуву (a, b) з неперевним часом. Спочатку доводиться строга консистентність оцінки максимальної вірогідності. Оскільки застосування цієї оцінки можливе лише при $2a > \sigma^2$, то запропоновано іншу оцінку, яка є строго консистентною при всіх додатних значеннях a, b, σ. Для демонстрації якості побудованих оцінок наведено результати їх симуляцій за допомогою комп'ютерного моделювання.
2. Розглянуто узагальнений процес Кокса – Інгерсолла – Росса зі стандартним броунівським рухом. Він задається стохастичним диференціальним рівнянням виду $dr_t = (a - b\, r_t)dt + \sigma r_t^{\beta} dW_t$, де a, b та σ – додатні константи, $\beta \in (1/2,1)$. Вивчено задачу оцінювання невідомого параметра зсуву (a, b) за неперервними спостереженнями траєкторії $\{r_t, t \in [0,T]\}$. Доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність оцінки максимальної вірогідності. Запропоновано іншу строго консистентну оцінку, яка узагальнює оцінку, запропоновану для $\beta = 1/2$. Також розглянуто визначення дифузійних параметрів σ та β.
3. Досліджено модель лінійної структурної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі. Дисперсії обох похибок – класичної та Берксона – вважаються відомими. Без припущень про нормальність розподілів будуються консистентні оцінки параметрів моделі та задаються умови їх асимптотичної нормальності. Встановлено, що побудовані статистичні оцінки розділяються на дві асимптотично незалежні групи.
4. Зроблено огляд та виписано системи рівнянь для оцінки в моделі бінарної регресії з лінійною залежністю відношення шансів та сумішшю класичної похибки та похибки Берксона в регресорі. Побудовано незміщену оціночну функцію в моделі логістичної регресії та в моделі бінарної регресії з лінійною залежністю відношення шансів – із сумішшю класичної похибки та похибки Берксона в регресорі.
5. Піддано ревізії дозиметричну систему опромінення щитоподібної залози (ЩЗ) для жителів України за допомогою таких даних, які нещодавно стали доступними: а) переглянуті значення ^{131}I - активності ЩЗ від прямих вимірювань у травні-червні 1986 р. у 146 425 осіб; б) переглянуті значення щільності випадань ^{131}I на грунті у кожному українському населенному пункті; в) оцінки маси ЩЗ відповідно до району, віку, статі мешканців України. Близько 99,8 % індивідуальних доз опромінення не перевищують 5 грей. Найвищі оцінені середні дози були знайдені для мешканців таких областей: Чергнігівської (0,15 грей), Київської (0,13 грей) і Житомирської (0,12 грей), за ними йдуть Рівненська (0,10 грей), Черкаська (0,088 грей) області та м. Київ (0,076 грей). Дози опромінення зросли, у порівнянні з попередніми оцінками, у середньому в 2,6 разів та від 1,4 разів до 10 разів для різних областей.
6. Досліджено властивості розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності із дробовим броунівським рухом, зокрема, доведено стаціонарність та ергодичність у багатовимірному випадку, одержано оцінку зверху для коваріаційної функції та досліджено її асимптотичну поведінку. Ці результати застосовано для встановлення строгої консистентності оцінки

параметра дифузії та знаходження її асимптотичного розподілу. Доведено, що цей розподіл є нормальним для $H \leq 3/4$, та розподілом Розенблатта у протилежному випадку.

7. Розглянуто матрицю Вандермонда з неповного рангу, до якої додається певний шум; запропоновано метод її відновлення. Наш підхід базується на незміщеному розвязку системи рівнянь з подальшою оцінкою шуканої структурованої матриці. Однак надійно вирішити дану проблему не так просто: з одного боку, можна дослідити різні обчислювальні методи як для розв'язання системи рівнянь, так і для оцінювання параметрів, з іншого боку, погана обумовленість матриць Вандермонда ускладнюють точне відновлення параметрів, навіть при невеликих помилках у даних.
8. Для дробового процесу Кокса – Інгерсолла – Росса досліджено задачу оцінювання параметра Хюрста та коефіцієнту дифузії за високочастотними спостереженнями траєкторії. Для обох невідомих параметрів побудовано оцінки, які базуються на квадратичних варіаціях процесу, та доведено їхню строгу консистентність. Якість побудованих оцінок проілюстровано за допомогою комп'ютерного моделювання.

5.2. За наявності науково-технічної продукції обґрунтування її переваг у порівнянні з існуючими аналогами

1. Для процесу Кокса – Інгерсолла – Росса побудовано оцінки для невідомих параметрів зсуву (a,b) з неперевним часом, які є строго консистентними при всіх додатних значеннях a, b, σ, це удосконалює існуючі методи оцінювання.
2. Для узагальненого процесу Кокса – Інгерсолла – Росса побудовано строго консистентні оцінки для усіх чотирьох параметрів моделі, включно зі степеневим параметром, що дає можливість повноцінного використання моделі на практиці.
3. У моделі лінійної структурної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі побудовано консистентні оцінки параметрів моделі та задаються умови їх асимптотичної нормальності. Нові методи дозволяють оцінювати параметри без припущень про нормальність розподілів.
4. Для стохастичного рівняння теплопровідності встановлено не лише строгу консистентність оцінки параметра дифузії, а також знайдено і її асимптотичний розподіл.

5.3. Практична цінність отриманих результатів реалізації Проєкту для економіки та суспільства (стосується проєктів, що передбачають проведення прикладних наукових досліджень і науково-технічних розробок)

1. Запропоновану методику можна розповсюдити на нелінійні моделі регресії із сумішшю класичної та берксонівської похибок у регресорі. Такі моделі виникають у задачах оцінювання радіаційних ризиків за наявності невизначеності у дозах опромінення.
2. Такі моделі виникають у задачах комп'ютерної алгебри при знаходженні апроксимації спільного множника заданого набору многочленів. Отримані результати дозволяють обчислювати відстань до наявності спільної подільності даних многочленів.
3. Можливе застосування побудованих оцінок у фінансових, біологічних, кліматологічних моделях, які описуються за допомогою відповідних стохастичних диференціальних рівнянь, як звичайних, так і з частинними похідними.

5.4. Опис шляхів та способів подальшого використання результатів виконання Проєкту в суспільній практиці.

1. Результати увійдуть до матеріалів спеціальних курсів з моделей регресії з похибками вимірювання, статистики випадкових процесів та наближених і асимптотичних методів у статистиці та фінансовій математиці, які читаються на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
2. Передбачається застосувати розвинуті підходи до оцінювання радіаційних ризиків за наявності невизначеності у дозах опромінення.

3. Можливі застосування отриманих результатів у задачах теорії управління та задачах ідентифікації динамічних систем.
4. Стохастичні моделі з неперервним часом будуть застосовані у фінансових задачах для моделювання цін акцій або інших цінних паперів.

Науковий керівник Проєкту
Завідувач кафедри теорії ймовірностей,
статистики та актуарної математики
професор Юлія МІШУРА

_____
(підпис)

(Алла БУРИХ)