

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор  
Інституту математики НАН України  
академік НАН України  
Олександр ТИМОХА  
(Власне ім'я та ПРІЗВИЩЕ)



(підпис)  
М.П.

## АНОТОВАНИЙ ЗВІТ

про виконану роботу у 2021 році в рамках реалізації проєкту  
із виконання наукових досліджень і розробок

“Складні динамічні системи в природничих науках: теорія, математичне моделювання,  
чисельні методи та застосування до передових технологій”

Назва конкурсу: “Підтримка досліджень провідних та молодих учених”

Реєстраційний номер Проєкту: 2020.02/0089

Підстава для реалізації Проєкту з виконання наукових досліджень і розробок  
(реєстраційний номер та назва Проєкту) 2020.02/0089 “Складні динамічні системи в  
природничих науках: теорія, математичне моделювання, чисельні методи та застосування до  
передових технологій”

Рішення наукової ради Національного фонду досліджень України щодо визначення  
переможця конкурсу “Підтримка досліджень провідних та молодих учених” протокол від  
”16-17” вересня 2020 року № 21

### 1. ЗАГАЛЬНА ІНФОРМАЦІЯ ПРО ПРОЄКТ

Загальна тривалість виконання проєкту 2020 рік – 2022 рік

Тривалість виконання Проєкту у 2021 році

Початок – 22 квітня 2021 року  
(дата укладання Договору про виконання наукового дослідження і розробки)

Закінчення – грудень 2021 року

Загальна вартість Проєкту, грн. 10 774 502,00 (десять мільйонів сімсот сімдесят чотири  
тисячі п'ятсот дві гривні, 00 копійок)

Вартість Проєкту по роках, грн.:

1-й рік 1 708 522,00 (один мільйон сімсот вісім тисяч п'ятсот двадцять дві гривні, 00  
копійок)

2-й рік 4 295 500,00 (чотири мільйони двісті дев'яносто п'ять тисяч п'ятсот гривень, 00  
коп.)

3-й рік 4 770 480,00 (чотири мільйони сімсот сімдесят тисяч чотириста вісімдесят гривень,  
00 копійок)

### 2. ІНФОРМАЦІЯ ПРО ВИКОНАВЦІВ ПРОЄКТУ

до виконання Проєкту буде залучено 9 виконавців, з них:

доктори наук 4;

кандидати наук 2;

доктори філософії 1;

інші працівники (асистенти-молоді вчені, аспіранти) 2.

### ВИКОНАВЦІ:

#### **(провідні вчені)**

ТИМОХА Олександр Миколайович (керівник), Інститут математики НАН України, директор, доктор фізико-математичних наук, академік НАН України

ВАСИЛИК Віталій Богданович, Інститут математики НАН України, заступник директора, доктор фізико-математичних наук

БУРИЛКО Олександр Андрійович, Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник, доктор фізико-математичних наук

#### **(молоді вчені)**

ПОКУТНИЙ Олександр Олексійович, Інститут математики НАН України, старший науковий співробітник, доктор фізико-математичних наук

БОНДАР Іванна Анатоліївна, Інститут математики НАН України, старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук

РАЙНОВСЬКИЙ Ігор Андрійович, Інститут математики НАН України, молодший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук

#### **(асистенти-молоді вчені, аспіранти) (список у 2021 році):**

ЛАГОДЗІНСКИЙ Олександр Євгенійович, Інститут математики НАН України, аспірант/молодший науковий співробітник

ЛОКАЗЮК Олександра Вікторівна, Інститут математики НАН України, аспірантка

САТУР Оксана Романівна, Інститут математики НАН України, доктор філософії, аспірантка/молодший науковий співробітник

### **3. ІНФОРМАЦІЯ ПРО ГРАНТООТРИМУВАЧА ТА ОРГАНІЗАЦІЮ(Ї) СУБВИКОНАВЦЯ(ІВ) ПРОЄКТУ**

#### **Інститут математики Національної академії наук України**

01024, м. Київ, вул. Терещенківська, буд. 3

(місцезнаходження)

р/р UA248201720343111001300012938

у Голосіївському ДКСУ в м. Києві

МФО 820172

ЄДРПОУ 05417207

неприбуткова організація

Залучення організації-субвиконавця для реалізації проєкту не передбачено.

### **4. ОПИС ПРОЄКТУ**

#### **4.1. Мета Проєкту (до 200 знаків)**

Математика складних динамічних систем (СДС) через синтез аналітичних й чисельних методів, розвиток на цій основі матмоделювання актуальних проблем природознавства (хвильові масопереноси, біореактори, нейронні мережи тощо).

#### **4.2. Основні завдання Проєкту (до 400 знаків)**

Розвиток методів: 1-2) аналізу стійкості, біфуркацій, мультистабільності, синхронізації, хаосу, химерних станів СДС; 3) матмоделювання через машинне навчання; 4-7) усереднення і теорії розв'язності крайових задач, біфуркацій та розгалуження їх розв'язків; (8) аналіз нескінченновимірних СДС; 9) побудови функцій Ляпунова; 10) умови керування та керованості СДС; 11) експоненціально збіжні методи для СДС (рівнянь з дробовими похідними).

#### **4.3. Детальний зміст Проєкту:**

- **Сучасний стан проблеми (до 400 знаків)**

- 1 Колективна динаміка мереж (опис в [Strogatz, Ashwin & Burylko](#)), *open*: нейромережі, химерні стани, ABC-потоки ...
- 2 Біфуркації й стійкість в задачах хлюпання ([Faltinsen & Timokha](#)): перенос Прандтля, маш. навчання моделей, левітація краплі ...
- 3 Еволюційні крайові задачі ([Sasu, Latushkin](#)): хаотичність, розв'язки, керування та керованість...
- 4 Експоненціальна збіжність для рівнянь з дроб. похідними і необмеж. операторами ([Кочубей, Thomme, Макаров, Гаврилюк](#)).

- **Новизна Проекту (до 400 знаків)**

- міждисциплінарний характер досліджень СДС (побудова матмоделей, аналіз й обчислення). Новими є задачі, підходи і методи, зокрема, в 1 аналіз інваріантних множин, ієрархічних структур, гетероклінічних химер; 2 маш. навчання модальних систем, теорії переносу Прандтля; 3 обмежених розв'язків для еволюційних динамічних систем за умови експоненціальної дихотомії на півосях; 4 наближення операторних функцій на випадок дифрівнянь з дробовими похідними.

- **Методологія дослідження (до 400 знаків)**

Комбінування аналітичних (теорії біфуркацій, збурень, складності і хаосу, функцій й експонент Ляпунова тощо) і чисельних підходів; мат. моделі через машинне навчання, вкл. адаптивні модальні системи теорії хлюпання. Стійкість і біфуркація - схематичні й біфуркаційні діаграми, гістограми, фазові портрети (Matlab, DsTool, Dynamics Solver, тощо). Узагальнено-обернені оператори, псевдообернені матриці, експоненціально збіжні схеми, Sinc-квадратури.

**5. ОТРИМАНІ НАУКОВІ АБО НАУКОВО-ТЕХНІЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ (до 2 сторінок) в поточному році/ в рамках реалізації Проекту, зокрема:**

**5.1. Опис наукових або науково-технічних результатів, отриманих в рамках виконання Проекту (із зазначенням їх якісних та кількісних (технічних) характеристик)**

*Дослідження націлені на базове розуміння фундаментальних математичних властивостей складних динамічних систем, які можна буде використати для моделювання різного типу феноменів у природознавстві. Фундаментальність, зокрема, означає, що основним результатом цього та подальших етапів Проекту є підготовка наукових статей у рейтингових журналах. Згідно Календарного плану (КП) та Технічного завдання (ТЗ) у 2021 році передбачалося підготувати до подачі у наукові журнали *чотири (4) статті*. За тематикою досліджень, передбачених КП і ТЗ у 2021 році фактом, опубліковано наступні 6 статей:*

- [1] Bihun D. S., Pokutnyi O.O., Panasenko E.V. Autonomous nonlinear boundary-value problems for the Lyapunov equation in the Hilbert Space. *Ukrainian Mathematical Journal* (Q2/Q3). 2021. 73. No 7. P. 1009-1022 (внесок виконавця – результати завдань 4-7 Календарного плану етапу 1 за 2021 рік); <http://doi.org/10.1007/s11253-021-01973-4>
- [2] Lukovsky I.A., Timokha A.N. A note on variational formalism for sloshing with rotational flows in a rigid tank with an unprescribed motion. *Ukrainian Mathematical Journal* (Q2/Q3). 2021. Vol. 73, № 10. P. 1369-1377 (внесок виконавця – результати завдань 1-3 Календарного плану етапу 1 за 2021 рік, а також анонс результатів до календарного плану на 2022 рік); <http://doi.org/10.37863/umzh.v73i10.6795>
- [3] Lagodzinskyi O.E., Timokha A.N. Counter- and co-directed swirling-type waves due to orbital excitations of a square-base tank. *Доповіді НАН України*. 2021. No 6. С. 45-51 (завдання 1-3 Календарного плану етапу 1 за 2021 рік, анонс результатів до календарного плану на 2022 рік); <https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.06.045>
- [4] Макаров В.Л., Гаврилюк І.П., Василик В.Б. Експоненціально збіжний метод для розв'язування абстрактного інтегродиференціального рівняння з дробовим інтегралом Харді-Тічмарша. *Доповіді НАН України*. 2021, No 1. С. 3-8 (внесок виконавця – результати завдань 1-4 Календарного плану етапу No 2 за 2021 рік); <https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.01.003>
- [5] Райновський І.А., Тимоха О.М. Про демпфовані усталені резонансні коливання рідини в контейнері кругового перерізу для довільних періодичних непараметричних збурень. *Вісник Київського Національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2021. No 3. С. 97-100 (завдання 1-3 Календарного плану етапу 1 за 2021 рік, анонс результатів до календарного плану на 2022 рік); <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.18>
- [6] Локазюк О.В. Лінійні симетрії лінійних систем двох диференціальних рівнянь другого порядку з залежними від часу коефіцієнтами. *Доповіді НАН України*. 2021. No 5. С. 3–11 (анонс результатів до етапів 2022 року); <https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.05.003>

Крім того, протягом 2021 після численних редакційних правок, спричинених зауваженнями

рецензентів, дороблялася одна із статей, поданих до друку в 2020 році, вона була опублікована у липні 2021 року: Faltinsen O.M., Timokha A.N. Coupling between resonant sloshing and lateral motions of a two-dimensional rectangular tank. *Journal of Fluid Mechanics* (Q1). 916, A60. P. 1-41 (внесок виконавця – результати завдання 1-3 Календарного плану етапу 1 за 2020 рік); <http://doi.org/10.1017/jfm.2021.266>

Протягом 2021 року подано у наукові журнали чотири (4) статті:

- [7] Burylko O., Martens E.A., Bick C. Symmetry breaking yields chimeras in two small populations of Kuramoto-type oscillators. *Chaos* (Q1) (внесок виконавця – результати завдань 5-9 Календарного плану етапу 2 за 2021 рік)
- [8] Василик В.Б., Гаврилук І.П., Макаров В.Л. Експоненційно збіжний метод наближення для рівняння з дробовою похідною і необмеженим операторним коефіцієнтом в банаховому просторі. *Ukrainian Mathematical Journal* (Q2/Q3), рукопис Id: 6984 - 2021-11-04 (внесок виконавця – результати завдань 1-4 Календарного плану етапу 2 за 2021 рік)
- [9] Boichuk A.A., Bihun D., Feruk V., Pokutnyi O. Minimizing of the quadratic functional on Hopfield networks. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* (Q2) (внесок виконавця – анонс результатів до етапу 1 за 2022 рік)
- [10] Бондар І.А. Слабкозбурена лінійна імпульсна крайова задача для систем інтегро-диференціальних рівнянь. *Нелінійні коливання* (Q3), рукопис 1368-1-2432 (завдання 7-8 Календарного плану етапу 1 за 2020 рік, а також завдання 4-7 етапу 1 за 2021 рік)

Протягом 2021 року також подано монографію (після видання українськомовної версії у 2022 році планується її переклад у видавництві De Gruyter):

- [11] Бойчук О.А., Покутний О.О. Крайові задачі для операторно-диференціальних рівнянь. Наукова думка, 2022 (внесок виконавця – результати до завдань 4-6 Календарного плану етапу № 1 за 2021 рік, також частково завдань 5-9 Календарного плану етапу 2 за 2021 рік)

Знаходяться у стадії рукопису (ще не подано, чи подається до альтернативного журналу) три (3) статті:

- [12] Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O. Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations (внесок виконавця – результати до завдань 4-7 Календарного плану етапу 1 за 2021 рік, анонс результатів на 2022 рік); <https://arxiv.org/abs/2105.05139> <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1397777/v1>
- [13] Бондар І.А. Умови існування розв'язку слабо збуреної імпульсної крайової задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь у випадку  $k \geq -2$ . (завдання 7-8 Календарного плану етапу 1 за 2020 рік, а також завдань 4-7 етапу № 1 за 2021 рік)
- [14] Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Machine learning of the amplitude-dependent damping coefficients in the Narimanov-Moiseev modal model of resonant liquid sloshing in a rectangular tank // (завдання 1-3 Календарного плану етапу 1 за 2021 рік)

Крім того, в рамках виконання наукових досліджень за підпроектом # 4 протягом етапу № 2 2021 року було підготовлено електронний підручник (німецькою мовою), який планується до виходу у 2022 році:

- [15] Gawriljuk I., Makarov V., Vasylyk V. Mathematische Modellierung mit MATLAB. EuropaBuch

Виконавець Проекту О.Є.Лагодзінський підготував рукопис дисертацію доктора філософії, виконану за тематикою Проекту (підпроект # 2) та його часткової підтримки.

Задля досягнення цілей Технічного завдання та Календарного плану етапу №1 у 2021 році вперше у науковій літературі (завдання № 1-3 першого етапу):

- Запропоновано методи прихованої фізики для машинного навчання (через малу кількість експериментальних даних) нелінійних адаптивних модальних (диференціальних) рівнянь, що є моделями хлюпання рідини у прямокутному баці, за малою кількістю експериментальних даних (завдання № 1-3 першого етапу).
- Застосовано побудований алгоритм машинного навчання для відновлення членів, які відповідають за демпфування. Проведено чисельне порівняння розв'язків вихідної та відновленої моделі (тестування) на відповідних вимушених режимах хлюпання. Дано аналіз амплітудно-частотних характеристики двох систем (завдання № 1-3 першого етапу).
- Отримання необхідних та достатніх умов існування обмежених на всій осі розв'язків крайових задач для еволюційних рівнянь у просторах Банаха та Гільберта за умови експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння (завдання № 4 першого етапу).
- Досліджено крайові задачі з імпульсним впливом, побудована теорія розв'язності та умов біфуркації та розгалуження розв'язків еволюційних крайових задач (завдання № 5-7 першого етапу).

Задля досягнення цілей Технічного завдання та Календарного плану етапу № 2 у 2021 році вперше у науковій літературі:

- Отримано зображення розв'язку диференціальних рівнянь з дробовими похідними та необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі на основі

перетворення Лапласа та операторних функцій. Досліджено параметри контурів інтегрування зображень розв'язків (*завдання № 1-2 другого етапу*).

- Побудований та обґрунтований чисельний метод для рівнянь з дробовими похідними та необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі, який характеризується експоненціальною швидкістю збіжності та можливістю розпаралелювання обчислень. Метод застосовано для задач дифузії в пористих середовищах (*завдання № 3-4 другого етапу*).
- Побудовано нові моделі з адаптацією, що описують колективні нейронні та економічні процеси, досліджено колективні режими, їх стійкість, біфуркації та мультистабільності (*завдання № 5-6 другого етапу*).
- Проведено біфуркаційний аналіз розв'язків, що описують різні колективні режими. Досліджено багатовимірні гетероклінічні бар'єрні структури у консервативно-дисипативних системах, описано інваріантні множини в осциляторних мережах з різною симетрією. Досліджено співіснування консервативної та дисипативної динаміки у системах з часово-оборотною симетрією (*завдання № 7-9 другого етапу*).

**Таким чином, досягнуто всі цілі та забезпечено виконання індикаторів першого та другого етапів Проєкту в 2021 році. Виконано також всі завдання етапу.**

## **5.2. За наявності науково-технічної продукції обґрунтування її переваг у порівнянні з існуючими аналогами**

Робота носить теоретичний та фундаментальний математичний характер, що не передбачає впровадження. В той же час,

- Метод машинного навчання адаптивних модальних систем дає можливість суттєво покращити відповідність теоретичних результатів відносно усталених хвиль у рухомому баці та має хороші перспективи інженерного застосування.
- Побудовані біфуркаційні діаграми для систем, які описують осциляторні та нейронні мережі з адаптацією дають можливість отримати математичну інтерпретацію для ряду практичних застосувань.

## **5.3. Практична цінність отриманих результатів реалізації Проєкту для економіки та суспільства (стосується проєктів, що передбачають проведення прикладних наукових досліджень і науково-технічних розробок).**

*Національна освіта:* залучено трьох аспірантів для роботи за прикладними темами, які є актуальними для української індустрії і де бракує спеціалістів вищої кваліфікації.

*Академічними бенефіціантами, крім математиків, є вчені у галузях гідромеханіки та комп'ютерних наук.*

## **5.4. Опис шляхів та способів подальшого використання результатів виконання Проєкту в суспільній практиці.**

Отримані математичні моделі:

- 1) можна ефективно застосовувати для дослідження динаміки і стійкості танкерних інженерних конструкцій, що несуть рідину,
- 2) можна застосовувати при дослідженні нейронних мереж, роботи зв'язаних лазерів,
- 3) рівняння з дробовими інтегралами або дробовими похідними та необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі є метамоделями для математичних моделей, що описують процес адсорбції в пористих середовищах, тому отриманий експоненціально збіжний метод можна використати при вивченні таких явищ.

*Анотований звіт не містить відомостей, заборонених до відкритого опублікування*

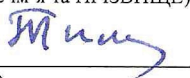
### **Науковий керівник Проєкту**

Директор Інституту математики НАН України

(посада)

Олександр ТИМОХА

(Власне ім'я та ПРІЗВИЩЕ)



(підпис)