УДК 517.91, 517.968
№ державної реєстрації 0121U112524
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64/13, тел: 239-31-25

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
професор ________ Ганна ТОЛСТАНОВА
«___»__________ 2021 р.

ЗВІТ

за договором від «_26__»____07____ 2021 р. № _213/Ф81/41743_

СТІЙКІСТЬ ТА РОБАСТНІСТЬ ЩОДО ЗБУРЕНЬ АТРАКТОРІВ НЕЛІНІЙНИХ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ СИСТЕМ

грантова підтримка Національного фонду досліджень України у межах конкурсу «Спільний конкурс науково-дослідних проєктів ДФФД та DFG (конкурс Ф81)»

(остаточний)

Науковий керівник НДР
д. ф.-м. н., проф. Олексій КАПУСТЯН

2021

Результати роботи розглянуто Науково-технічною радою Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
протокол №10 від 09. 12. 2021 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, Голов. наук. співр., д.ф.-м.н., проф.	Олексій КАПУСТЯН (реферат, вступ, підрозділи 1.3, 1.4, 1.5, розділи 2, 3, висновки)
Пров. наук. співр., д.ф.-м. н., с.н.с.	Олена КАПУСТЯН (підрозділи 1.2, 1.3, 1.5, 2.2)
Пров. наук. співр., д.ф.-м. н., проф.	Олександр СТАНЖИЦЬКИЙ (підрозділи 1.4, 2.4, 2.5)
Ст. наук. співр., к.ф.-м. н.	Юрій ПЕРЕСТЮК (підрозділи 2.1, 2.2, 2.3)
Інженер I кат.	Тетяна ЖУК (підрозділи 1.1, 1.2, 1.3)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 155 с., 160 джерел, 2 додатки.

СТІЙКІСТЬ, АТРАКТОР, ІМПУЛЬСНА ДИНАМІЧНА СИСТЕМА, ЕВОЛЮЦІЙНЕ РІВНЯННЯ, НАБЛИЖЕНЕ КЕРУВАННЯ.

Об’єкт дослідження: атрактори та наближені керування в системах зі збуреннями.

Мета роботи: дослідження стійкості та робастності глобальних атракторів та побудова наближених керувань нескінченновимірних еволюційних систем щодо імпульсних та зовнішніх збурень.

Методи дослідження: результати теорії нелінійних крайових задач, теорії глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем, теорії стійкості динамічних систем, якісної теорії імпульсних та стохастичних систем, методи нелінійного та многозначного аналізу, теорії усереднення, теорії стійкості від входу до стану.

Вивчено питання стійкості та робастності притягуючих множин та атракторів, а також питання побудови ефективних наближених керувань, в нелінійних нескінченновимірних системах, що функціонують під дією збурень. Для імпульсно-збурених систем була розвинена якісна теорія рівномірних притягуючих множин. При найбільш загальних умовах на вхідні дані встановлені ефективні достатні умови існування, стійкості та робастності рівномірних атракторів для асимптотично компактних імпульсних процесів, породжених нелінійними хвильовими рівняннями з імпульсним збуренням, та результати про існування та стійкість рівномірних атракторів для многозначних компактних імпульсних процесів, породжених імпульсно-збуреними еволюційними системами типу реакція-дифузія. Для еволюційних керованих систем зі збуреннями в коефіцієнтах обгрунтовано методи побудови наближених оптимальних керувань та наближеного синтезу. Для нелінійних нескінченновимірних систем були встановлені результати щодо стійкості по відношенню до зовнішніх збурень. Були доведені теореми про локальну стійкість від входу до стану (LISS) та про асимптотичне підсилення (AG) для компактних та асимптотично компактних збурених нескінченновимірних систем. Одержані теореми були застосовані до збурених нелінійних хвильових рівнянь, параболічних систем типу реакція-дифузія та зв’язаних систем типу PDE-ODE.

Результати НДР впроваджено: у навчальний процес механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

ЗМІСТ

ВСТУП

В роботі вивчались питання стійкості та робастності глобальних атракторів, а також питання побудови ефективних наближених керувань, в нелінійних нескінченновимірних системах, що функціонують під дією збурень. Дослідження проводились в наступних трьох напрямах: були одержані результати щодо наближених оптимальних керувань в системах зі збуреннями в коефіцієнтах; були одержані результати щодо існування та властивостей притягуючих множин та атракторів асимптотично-компактних імпульсних процесів в нескінченновимірних фазових просторах, та одержані застосування до імпульсно-збурених слабонелінійних хвильових рівнянь та систем без єдиності; були одержані результати щодо робастної стійкості збурених нескінченновимірних систем, відносно глобальних атракторів відповідних незбурених систем, та одержані застосування до встановлення робастної стійкості дисипативних параболічних та хвильових рівнянь зі збуреннями, а також змішаних систем.

Перший розділ роботи присвячено результатам щодо наближених оптимальних керувань в задачах зі збуреннями. Для еволюційних керованих систем зі збуреннями в коефіцієнтах обгрунтовано методи побудови наближених оптимальних керувань. Розглянуті задачі керування для еволюційних включень з ліпшицевими та напінеперервними правими частинами, а також задачі наближеного керування та синтезу для нелінійних параболічних рівнянь з коерцитивними цільовими функціоналами. Шляхом переходу до усереднених параметрів одержані теореми про збіжність наближених керувань до оптимальних. Ключовим моментом на цьому шляху було узагальнення класичного методу усереднення на диференціальні системи без єдиності та диференціальні включення. Розвиток теорії диференціальних включень, як природного узагальнення диференціального рівняння, значною мірою викликаний багаточисельним застосуванням. Велика кількість задач із механіки, електротехніки, теорії автоматичного керування описуються такими об'єктами. Зараз широко розвинені напрямки досліджень диференціальних включень. Їх розгляд з самого початку вимагає узагальнення поняття розв'язку. На початку 60-х років минулого століття з'явився цикл робіт Т.Важевського [155, 156] і А.Ф. Філліпова [16], в яких розглядаються різні означення розв'язків диференціальних включень, вказуються умови їх застосування, отримано принципові результати про їх існування і властивості. Одним із найбільш важливих результатів цих робіт було встановлення зв'язку диференціальних включень із задачами оптимального керування. Природно, тут виникають всі проблеми, властиві звичайним диференціальним рівнянням - це теореми існування розв'язку, продовжуваності розв'язку, обмеженості, неперервної залежності від початкових умов і параметрів і ін. Багатозначність, в свою чергу, породжує ряд специфічних проблем, таких як замкненість, опуклість сім'ї розв'язків, існування граничних розв'язків, виділення розв'язків із заданими властивостями і багато інших. Проте добре розвинений апарат математичного аналізу стосовно багатозначних функцій дає можливість вирішувати ці проблеми. До дослідження задач керування диференціальними рівняннями та включеннями існує багато підходів, зокрема, широко застосовуються асимптотичні методи. Серед них варто виділити метод усереднення, строге математичне обґрунтування якого було запропоновано М.М. Криловим та М.М. Боголюбовим. В роботах Плотнікова та його школи (див., наприклад, [11]) дане строге обґрунтування методу усереднення до задач керування. У монографії [12] висвітлюється обґрунтування методу усереднення, зокрема, для звичайних диференціальних включень, включень з частинними похідними, включень з похідною Хукухари. У роботі [9] спочатку проводилось усереднення за часом, що явно входить у систему, при цьому функція керування вважалась параметром і по ній усереднення не проводилось. При цьому авторам довелось накладати умову асимптотичної сталості на функцію керування. У роботі [107] застосовано підхід із [9] до розв'язання задачі оптимального керування на скінченному часовому інтервалі, однак при цьому знято досить жорстку умову асимптотичної сталості. У роботі [5] отримано аналогічні результати до [107] на півосі. У роботі [6] застосовано метод усереднення до розв'язання задачі оптимального керування зі швидкоколивними змінними, лінійної за керуванням, на скінченному інтервалі. Об'єктом керування при цьому виступає система диференціальних включень з Ліпшицевою за фазовою змінною правою частиною. Також задачі оптимального керування на півосі в різних задачах зі збуреннями вивчалися в [80]-[157]. В роботі [7] застосовується метод усереднення до дослідження задачі оптимального керування зі швидкоколивними змінними системою диференціальних включень на півосі. Зокрема, за допомогою прямого методу варіаціного числення доведена розв'язність вихідної та усередненої задач. Обгрунтована збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і траєкторії усередненої задачі . При цьому показано, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальним" для точної задачі, тобто з точністю до малого параметру ε реалізується мінімум критерію якості.

В підрозділах 1.1 та 1.2 метод усереднення застосовується для обгрунтування наближеного оптимального керування для еволюційних керованих рівнянь з многозначною ліпшицевою правою частиною на скінченому часовиму проміжку та на півосі за умови існування середнього значення в метриці Хаусдорфа. В підрозділі 1.3 цей метод суттєво модифіковано і застосовано до еволюційного включення з напінеперервною правою частиною, для якої не існує класичного середнього значення. В підрозділі 1.4 шляхом переходу до усереднених параметрів розв'язана задача наближеного керування для нелінійного рівняння типу реакція-дифузія з коерцитивними цільовим функціоналом. В підрозділі 1.5 обгрунтовано наближений синтез, тобто керування в формі оберненого зв'язку для нелінійно-збуреного еволюційного рівняння параболічного типу.

В другому розділі роботи містяться результати щодо якісної поведінки нескінченновимірних систем, що функціонують під дією імпульсних та випадкових збурень. Основну увагу зосереджено на властивостях рівномірних атракторів збурених систем. Теорія атракторів дисипативних систем забезпечує інформацію про довгострокову поведінку систем, що є досить цінним при моделюванні практичних систем і теорії керування. Ця інформаціє є цікавою з точки зору застосування, але її отримання призводить до складних з математичної точки зору проблем, особливо у випадку нелінійних нескінченновимірних систем. Відомо, що у випадку скінченновимірного фазового простору дисипативна неперервна динамічна система має глобальний атрактор, тобто інваріантну глобально рівномірно притягуючу компактну множину. Для доведення існування такої множини для нескінченновимірної неперервної динамічної системи ми маємо зробити додаткові припущення – асимптотичну компактність, що може бути перевірена різними способами для достатньо загальних класів еволюційних процесів [149],[38],[131]. Більше того, використовуючи підхід багатозначного аналізу [21], теорія глобальних атракторів може бути застосована до систем з неєдиністю розв'язків задачі Коші [24]-[85].

Проте в деяких практичних ситуаціях динаміка не завжди є неперевною в силу таких ефектів, як пружні зіткнення, передача сигналів, спричинені подіями, що спричиняють імпульсні ефекти [77]. В математичному моделюванні відповідних реальних застосувань в механіці, інженерії, біології, і т.п., можна зіштовхнутись з гибридними системами [68], в яких дискретна і неперервна динаміки поєднуються в одну модель. Важливим підкласом таких систем є імпульсні динамічні системи. Їхня неперервна динаміка описується за допомогою неперервної напівгрупи, доки розв'язок не досягає заданої множини в просторі станів. Досягнувши цієї множини стан миттєво змінюється в силу імпульсної дії. Тоді динаміка знову керується неперервною напівгрупою. Такі системи систематично почали вивчатись в [137], [113], [18]. З недавніх пір такий підхід використовується при математичному моделюванні проблем біології і медицини [77]. Якісний аналіз таких систем в скінченновимірному випадку проведений в [42]-[46].

Основна проблема, з якою ми зіштовхуємось при спробі поширити теорію глобальних атаракторів на імпульсні динамічні системи, є відсутність неперервної залежності від початкових даних. Для подолання таких труднощів було запропоновано два підходи. Один із підходів був запропонований і розвинутий у [28]-[31]. Ключовою ідеєю згаданих робіт є збереження властивості інваріантності в означенні атрактора. Цей підхід дозволяє побудувати теорію атракторів для імпульсних динамічних систем подібну до класичної, але він вимагає додаткової інформації про імпульсні траєкторії в околі імпульсної множини, що вимагає суттєвих обмежень на їх поведінку. Інший підхід був розвинений в [86]-[48] і використовує поняття рівномірного атрактору. Перевагою цього підходу є те, що ми працюємо з компактною рівномірно притягуючою множиною без будь-яких обмежливих припущень на імпульсний напівпотік. Але в усіц названих роботах існування рівномірного атрактору доводиться за допомогою перевірки асимптотичної компактності для імпульсного напівпотоку. Така перевірка є досить складною вже у випадку відносно простих задач, тому що час імпульсної дії є зазвичай наперед невідомим. В підрозділі 2.1 розвивається інший підхід, який забезпечує нові ефективні достатні умови для властивості асимптотичної компактності імпульсного напівпотоку, яка може бути перевірена, виходячи лише з властивостей неперервної напівгрупи і властивостей імпульсного відображення. Це дозволило розглянути більш загальні класи систем з імпульсною дією. Зокрема, в підрозділі 2.2 встановлюється існування та властивості рівномірного атрактору для імпульсно-збуреної системи рівнянь типу реакції-дифузії, в підрозділі 2.3 доведено існування рівномірного атрактору для імпульсно-збуреного хвильового рівняння. В підрозділах 2.4, 2.5 розглянуто систему типу реакція-дифузія з нелокальним диференціальним оператором та стохастичними збуреннями. Основна увага приділена існуванню існування сильних розв'язків та їх асимптотичній поведінці, зокрема існуванню інваріантних мір та збіжності до стаціонарних станів у випадку малих збурень.

В третьому розділі досліджено властивість робастної стійкості глобальних атракторів відносно збурень. Як відомо, асимптотична стійкість положення рвноваги – це фундаментальна властивість еволюційних процесів, яка грає важливу роль для багатьох застосувань. Крім того, їх робастність має вирішальне значення для правильної роботи багатьох інженерних систем. Відомо, що глобально асимпотитичне стійке положення рівноваги лінійної скінченновимірної системи є робастною в сенсі, що ля довільного обмеженого зовнішнього збурення, що входить до системи, відповідний розв'язок залишається обмеженим для всього часу і що він прямує до деякого околу навколо рівноваги, коли час прямує до нескінченності. Розмір цього околу (кулі) залежить лише від норми збурення. Для нелінійних систем це в загальному випадку невірно і призводить до поняття стійкості від входу до стану (input-to-state stability, ISS), введеного в [143] для скінченновимірних систем і є зараз загальноприйнятим апаратом при дослідженні робастної стійкості практичних систем, що виникають в застосуваннях, зокрема, в теорії керування. Це поняття також підходить для вивчення робастності положень рівноваги у випадку нескінченновимірних систем [51]. Протягом останнього десятиліття багато авторів працювали у напряму узагальнення теорії ISS для такого класу систем. Багато з цих узагальнень були розвинені для систем, що задані в термінах диференціальних рівнянь в частинних похідних [53], [?], [119], [118], [140], [141], [74], [98], [99], [100]. Проте, ISS-підхід для нескінченновимірних систем не так добре розвинений як для скінченновимірного випадку. Незважаючи на багато нещодавніх результатів, велика кількість важливих питань залишаються відкритими (див. оглядову роботу [116]). Варто зауважити, що майже всі ISS-подібні результати для рівнянь в частинних похідних були розвинені у випадку наявності єдиної глобально асимптотично стійкої точки рівноваги незбуреної системи. Проте відомо, що для багатьох дисипативних нелінійних нескінченновимірних систем характерна наявність нетривіальної граничної динаміки, що характеризується глобальним атрактором. В даному розділі ми вивчаємо питання робастності таких притягуючих множин відносно зовнішніх збурень. Нас цікавить наступне питання: якщо ми маємо систему, що має глобальний атрактор, то що ми можемо сказати про притягуючу множину для розв'язків збуреної системи, тобто якщо до системи входить деяке збурення u? Наскільки відомо авторам проекту, такі задачі раніше не розглядались. В підрозділі 3.1 описано та обгрунтовано загальний підхід до дослідження таких задач. В підрозділі 3.2 цей підхід застосовано до дослідження робастної стійкості атрактора нелінійного хвильового рівняння, в підрозділі 3.3 доведено стійкість атрактору по відношенню до зовнішніх збурень для системи реакція-дифузія з многозначним розв'язуючим оператором. В підрозділах 3.4 і 3.5 ми встановлюємо властивість ISS для атрактору змішаної системи, що складається з параболічної системи типу реакції-дифузії та системи звичайних диференціальних рівнянь, що зазнають адитивних обмежених збурень, та збурень через границю області.

РОЗДІЛ 1 НАБЛИЖЕНІ КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ЗІ ЗБУРЕННЯМИ

1.1 Наближене керування для еволюційного включення на скінченому проміжку.

Розглядається задача оптимального керування зі швидкоколивними змінними, лінійна за керуванням

$$\dot{x} \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + f_1(x)u(t),\ x(0, u(0)) = x_0 \tag{1.1}$$

із критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int\limits_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + B(t, u(t))]\, dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \to inf \tag{1.2}$$

Також для задачі (1.1) розглянемо квадратичний за керуванням критерій

$$J_\varepsilon[u] = \int\limits_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + u^2(t)]\, dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \to inf \tag{1.3}$$

Тут $\varepsilon > 0$ - малий параметр, $T > 0$ - задана стала, x - фазовий вектор в $\mathbb{R}^d$, $u(t) - m$-вимірний вектор керування, який належить деякій функціональній множині.

За умови існування рівномірного за $x \in \mathbb{R}^d$ середнього

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int\limits_0^s f(t, x)\, dt = f_0(x), \tag{1.4}$$

де $f_0(x)$ - однозначне відображення, задачі оптимального керування (1.1), (1.2) ((1.3))зі швидкоколивними коефіцієнтами ставиться у відповідність на $[0, T]$ більш проста задача оптимального керування

$$\dot{y} = f_0(y) + f_1(u)u(t),\ y(0, u(0)) = x_0 \tag{1.5}$$

із критеріями якості

$$J_0[u] = \int\limits_0^T [A(t, y(t)) + B(t, u(t))]\, dt + \Psi(y(T)) \to inf \tag{1.6}$$

і

$$J_0[u] = \int\limits_0^T [A(t, y(t)) + u^2(t)]\, dt + \Psi(y(T)) \to inf \tag{1.7}$$

Введемо деякі допоміжні поняття та твердження.

Нехай A і B - непорожні, замкнені множини в метричному просторі $\mathbb{R}^n$. Розглянемо наступні величини, що характеризують близькість A і B:

$$\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B), \beta(B, A) = \sup_{b \in B} \rho(b, A)$$

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\} = \max\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\} =$$

$$= \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(b, a)\}$$

Зокрема, маємо, що $\alpha(A, B) = \alpha(B, A)$.

Означення 1.1. [17] Величину $\alpha(A, B)$ називають відхиленням множин A і B за Хаусдорфом або хаусдорфовою відстанню між A і B.

Кожній точці p із множини $D \in \mathbb{R}^d$ поставимо у відповідність непорожню замкнену множину $F(p) \subset \mathbb{R}^n$. Тоді $F(p)$ - багатозначна функція. Її графік – множина таких точок $(p, q) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, що $p \in D, q \in F(p)$.

Надалі використовуватимемо наступні позначення:

$$F(M) = \bigcup_{p \in M} F(p), |F(M)| = \sup_{y \in F(M)} |y|.$$

Означення 1.2. [17] Багатозначна функція F називається обмеженою на множині M, якщо $|F(M)| < \infty$, тобто якщо всі значення функції F в точках множини M містяться у деякій кулі.

Означення 1.3. [17] Багатозначна функція $F(p)$ називається:

- α - неперервною (або неперервною) в точці p, якщо

$$\alpha(F(p'), F(p)) \to 0, p' \to p;$$

- β - неперервною (або напівнеперервною зверху відносно включення) в точці p, якщо

$$\beta(F(p'), F(p)) \to 0, p' \to p.$$

Функція $F(p)$ називається α - або β - неперервною на множині D, якщо вона α - або β - неперервна в кожній точці цієї множини.

Зауваження 1.1. [17] Оскільки $\beta(A, B) \leq \alpha(A, B)$,то із α - непервності функції випливає її β - неперервність.

Необхідні поняття теорії диференціальних включень. Розглянемо диференціальне включення

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{1.8}$$

Означення 1.4. [17] Розв'язком диференціального включення (1.8) називається абсолютно неперервна функція $x(t)$, визначена на інтервалі або відрізку і майже скрізь задовольняє включення (1.8).

Означення 1.5. [17] Будемо казати, що багатозначна функція $F(t, x)$ в області G задовольняє основні умови, якщо при всіх $(t, x) \in G$ множина $F(t, x)$ - непорожня, обмежена, замкнена, опукла і F - β - непервна по t, x.

Теорема 1.1. [17] Нехай $F(t, x)$ задовольняє основні умови в області G. Тоді для довільної точки $(t_0, x_0) \in G$ існує розв'язок задачі

$$\dot{x} \in F(t, x), x(t_0) = x_0. \tag{1.9}$$

Якщо область G містить циліндр $z(t)(t_0 \le t \le t_0 + a, |x - x_0| \le b)$, то розв'язок існує принаймні на відрізку

$$t_0 \le t \le t_0 + d, d = \min\{a, \frac{b}{m}\}, m = \sup_z |F(t,x)|.$$

Означення 1.6. [1] Нехай задана послідовність множин $F_i \in \mathrm{comp}\mathbb{R}^n$ - сукупність непорожніх компактних підмножин в $\mathbb{R}^n$.

- Верхньою топологічною границею послідовності $\{F_i\}$ називається сукупність всіх часткових границь таких послідовностей $\{f_i\}$, що $f_i \in F_i$ для всіх i. Позначається $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} F_i$.
- Нижньою топологічною границею послідовності $\{F_i\}$ називається сукупність всіх границь збіжних послідовностей $\{f_i\}$, що $f_i \in F_i$ для всіх i. Позначається $\underline{\lim\limits_{i\to\infty}} F_i$.
- Якщо обидві границі існують і

  $$\underline{\lim_{i\to\infty}} F_i = \overline{\lim_{i\to\infty}} F_i = F,$$

  то множина F називається границею послідовності $\{F_i\}$. В цьому випадку

  $$\lim_{i\to\infty} \alpha(F_i, F) = 0.$$

Означення 1.7. [1, 23] Нехай $F : \mathbb{R}^1 \to \mathrm{comp}\ (\mathbb{R}^n)$ – деяке багатозначне відображення. Інтегралом від відображення $F(t)$ на відрізку часу $[t_0, t_1]$ називається множина

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt : f(t) \in F(t) \right\} \tag{1.10}$$

Теорема 1.2. (Теорема Красносельського-Крейна для диференціальних включень)[13, 10, 14] Нехай для диференціального включення

$$\dot{x} \in F(t, x, \lambda), \tag{1.11}$$

де багатозначне відображення $F(t,x,\lambda)$*, що приймає значення в* $conv(\mathbb{R}^n)$ *(підпростір із* $comp\,(\mathbb{R}^n)$*, що складаєтьъся із опуклих множин), визначене при* $0 \le t \le T, x \in D, D$ *- обмежена область в* $\mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda$ *- деяка множина значень параметра* λ*, що має* $\lambda_0 \in \Lambda$ *граничною точкою, виконуються наступні умові:*

а) *багатозначне відображення* $F(t,x,\lambda)$ *рівномірно обмежене, неперервне по* t*, рівномірно неперервне по* x *рівномірно відносно* t *і* λ*:* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t \in [0,T], x \in D, x' \in D$ *і* $\lambda \in \Lambda$ *виконується*

$$\alpha(F(t,x',\lambda) - F(t,x,\lambda)) < \varepsilon,$$

як тільки $|x' - x| < \delta$*;*

б) *багатозначне відображення* $F(t,x,\lambda)$ *- інтегрально неперервне по* λ *в точці* λ_0*, тобто для* $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ *і довільного* $x \in D$ *виконується умова*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \alpha \left(\int_{t_1}^{t_2} F(s,x,\lambda)\, ds, \int_{t_1}^{t_2} F(s,x,\lambda_0)\, ds \right) = 0, \tag{1.12}$$

де інтеграли розуміються включення в сенсі Означення 1.7;

в) *розв'зки* $x(t,\lambda_0)$ *включення*

$$\dot{x} \in F(t,x,\lambda_0), \tag{1.13}$$

що задовольняють умову $x(0,\lambda_0) = x_0 \in D^1 \subset D$*, визначені при* $0 \le t \le T$ *і лежать разом з деяким* ρ*-околом в області* D*.*

Тоді кожному $\eta > 0$ *відповідає такий окіл* $U(\lambda_0)$ *точки* λ_0*, що при* $\lambda \in U(\lambda_0)$ *для довільного розв'язку* $x(t,\lambda)$ *включення* (1.11)*, визначеного при* $0 \le t \le T$ *і такого, що задовольняє початкову умову* $x(0,\lambda) = x_0$*, існує такий розв'язок* $x(t,\lambda_0)$ *включення* (1.13)*, що справедлива нерівність* $\| \ x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0) \ \| < \eta, 0 \le t \le T$*.*

Тепер розглядаємо диференціальне включення зі збуреннями в коефіцієнтах

$$\dot{x} \in \varepsilon X(t,x),\ x(0) = x_0, \tag{1.14}$$

де $x \in \mathbb{R}^n, X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n), \varepsilon > 0$ - малий параметр.

Включенню (1.14) поставимо у відповідність усереднене диференціальне включення

$$\dot{y} \in X_0(y), y(0) = x_0, \tag{1.15}$$

де

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(t,x)\, dt \tag{1.16}$$

Збіжність в (1.16) розуміється у сенсі метрики Хаусдорфа, а інтеграл від багатозначного відображення $X(t,x)$ розуміється в сенсі Означення 1.7.

Для параметрів задачі (1.1)–(1.2) ((1.3)) будемо вважати виконаними наступні умови:

Умова 1. Допустимими керуваннями є m – вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_p([0,T])$, $p > 1$, які приймають значення в замкненій, опуклій множині $V \subset \mathbb{R}^m$.

Для задачі (1.1) – (1.3) допустимими керуваннями будемо вважати m – вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_2([0,T])$, які приймають значення в замкненій опуклій множині $u \subset \mathbb{R}^m$.

Умова 2. Багатозначна функція $f(t,x)$ ($f : Q = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\} \to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^d)$) визначена і неперервна за сукупністю змінних в Q, а $d \times m$ - вимірна матриця $f_1(x)$ визначена при $x \in \mathbb{R}^d$ і виконані умови:

1) $f(t,x)$ в області Q задовольняє умову лінійного росту за x із константою

M, тобто

$$|f(t,x)| \le M(1+|x|) \qquad \forall (t,x) \in Q;$$

2) $f(t,x)$ і $f_1(x)$ в області визначення задовольняють умову Ліпшиця за x із константами λ_1 та λ, відповідно, тобто

$$\alpha(f(t,x), f(t,x')) \le \lambda_1 |x - x'|,$$

$$\|f_1(x) - f_1(x')\| \le \lambda |x - x'|.$$

Умова 3. Рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ існує границя

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int\limits_0^s f(t,x)\,dt = f_0(x), \tag{1.17}$$

де інтеграл розуміється в сенсі Означення 1.7, а збіжність - в сенсі Означення 1.6, функція $f_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ - однозначна.

Умова 4. Скалярні функції $A(t,x)$ і $B(t,u)$ визначені при $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d, u \in V$ і неперервні за сукурністю змінних причому:

1) $A(t,x) \ge 0,\ B(t,u) \ge a|u|^p$ для деякої сталої $a > 0$ і для кожного $t \in [0,T]$ функція $B(t,u)$ - опукла за $u \in V$;

2) функція $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ - неперервна за x та невід'ємна.

Зауваження 1.2. В силу умов на $f(t,x)$ і $f_1(x)$ та теореми 1.5 маємо, що $\forall \varepsilon > 0$ і для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (1.1) існує на [0,T].

При цьому $x(t,u)$ - абсолютно неперервна функція. Із умов 2, 3 випливає, що f_0 також задовольняє умову Ліпшиця з константою λ_1. Тому для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (1.5) $y(t,u)$ існує, єдиний на $[0,T]$ і є абсолютно неперервною функцією. Тому критерії (1.2), (1.3), (1.6), (1.7) мають сенс при всіх допустимих керуваннях.

Сформулюємо наступний результат щодо рівномірної збіжності розв'язків задачі Коші.

Теорема 1.3. Нехай виконані умови 1-3. Тоді якщо послідовність $u_\varepsilon \xrightarrow{w} u_0$ *в* $L_p([0,T])$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то розв'язок* $x_\varepsilon(t)$ *залачі Коші* (1.1) *з* $u(t) = u_\varepsilon(t)$ *збігається рівномірно на* $[0,T]$ *до* $y(t)$ *- розв'язку відповідної задачі Коші* (1.5) *із керуванням* $u(t) = u_0(t)$, *тобто*

$$x_\varepsilon(t) \rightrightarrows y(t), \varepsilon \to 0 \tag{1.18}$$

рівномірно по $t \in [0,T]$.

Доведення. Множина звичайних розв'язків диференціального включення із (1.1) співпадає з множиною узагальнених розв'язків [62], яка визначається як множина неперервних функцій $x_\varepsilon(t)$, що задовольняють включення

$$x_\varepsilon(t) \in x_0 + \int\limits_0^t f(\frac{s}{\varepsilon}, x_\varepsilon(s))\, ds + \int\limits_0^t f_1(x_\varepsilon(s)) u_\varepsilon(s)\, ds. \tag{1.19}$$

В силу умов 1 і 2 отримаємо, що

$$|x_\varepsilon(t)| \le |x_0| + \int\limits_0^t M(1 + |x_\varepsilon(s)|)\, ds + \int\limits_0^t (\|f_1(0)\| + \lambda |x_\varepsilon(s)|) |u_\varepsilon(s)|\, ds$$

або

$$|x_\varepsilon(t)| \le |x_0| + \int\limits_0^t (M + \|f_1(0)\| |u_\varepsilon(s)|)\, ds + \int\limits_0^t (M + \lambda |u_\varepsilon(s)|) |x_\varepsilon(s)|\, ds. \tag{1.20}$$

Використавши нерівність Грануолла, будемо мати:

$$|x_\varepsilon(t)| \le (|x_0| + M + \|f_1(0)\| T^{1/q} \cdot \|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]}) e^{MT + \lambda T^{1/q} \|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]}} \tag{1.21}$$

Зі слабкої збіжності u_ε до u_0 випливає сильна обмеженість u_ε, тобто

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]} < \infty,$$

а тому із (1.20) отримуємо, що $\exists L > 0$:

$$|x_\varepsilon(t)| \leq L \tag{1.22}$$

для всіх $\varepsilon > 0$ і $t \in [0, T]$. Таким чином, маємо рівномірну обмеженість сім'ї $x_\varepsilon(t)$.

Обгрунтуємо рівностепеневу неперервність сім'ї $x_\varepsilon(t)$ на $[0, T]$.

Для довільних $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [0, T]$, використовуючи (1.20) і (1.22), маємо:

$$|x_\varepsilon(t_2) - x_\varepsilon(t_1)| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} M(1+L)\, ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} (\|f_1(0)\| + \lambda L)|u_\varepsilon(s)|\, ds \leq$$

$$\leq M(1+L)(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)^{1/q}(\|f_1(0)\| + \lambda L) \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} |u_\varepsilon(s)|^p\, ds \right)^{1/p},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тоді в силу теореми Арцела існує підпослідовність $x_{\varepsilon_n}(t)$ послідовності $x_\varepsilon(t)$, яка рівномірно за $t \in [0, T]$ збігається до деякої функції $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Із (1.19) маємо:

$$\begin{gathered} x_{\varepsilon_n}(t) \in x_0 + \int\limits_0^t f\left(\tfrac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right)\, ds + \int\limits_0^t f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) u_{\varepsilon_n}(s)\, ds \pm \\ \pm \int\limits_0^t f_1(x_0(s)) u_{\varepsilon_n}(s)\, ds = x_0 + \int\limits_0^t f\left(\tfrac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right)\, ds + \int\limits_0^t f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) u_{\varepsilon_n}(s)\, ds + \\ + \int\limits_0^t (f_1(x_{\varepsilon_n}(s) - f_1(x_0(s)))) u_{\varepsilon_n}(s)\, ds \end{gathered} \tag{1.23}$$

В силу умови 2 для функції $f(t, x)$ маємо виконання умови а) теореми 2. Зокрема з пункту 1) умови 2 випливає рівномірна обмеженість $f(t, x)$, а із пункту 2) умови 2 маємо рівномірну неперервність $f(t, x)$ по x.

Перевіримо інтегральну неперервність функції $f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(s)\right) =: Y(s, x(s), \varepsilon_n)$. За умови виконання (1.17), поклавши $f_0 = Y(s, x, 0)$, будемо мати:

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \int\limits_0^t Y(s, x(s), \varepsilon_n)\, ds = \lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \int\limits_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(s)\right)\, ds = \lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \int\limits_0^{\frac{t}{\varepsilon_n}} f(\theta, x)\, d\theta =$$

$$= t \lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \frac{1}{t/\varepsilon_n} \int\limits_0^{\frac{t}{\varepsilon_n}} f(\theta, x)\, d\theta = t f_0(x) = \int\limits_0^t f_0(x)\, ds = \int\limits_0^t Y(s, x, 0)\, ds,$$

де границя від многозначних відображень розуміється в сенсі Означення 1.6.

Таким чином, маємо виконання умови б) теореми 1.2.

В силу умови 5 маємо виконання умови в) теореми 1.2.

Аналогічно до доведення теореми 1.2, проведеного, зокрема в [13, 14], можна показати, що

$$\alpha\left(\int\limits_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right)\, ds, \int\limits_0^t f_0(x_0(s))\, ds\right) \longrightarrow 0, \varepsilon_n \to 0 \tag{1.24}$$

Далі в силу слабкої збіжності маємо:

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} \int\limits_0^t f_1(x_0(s)) u_{\varepsilon_n}(s)\, ds = \int\limits_0^t f_1(x_0(s)) u_0(s)\, ds \tag{1.25}$$

Використавши пункт 2) із умови 2 для останнього інтегралу в (1.23), отримаємо оцінку

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_0^t (f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) - f_1(x_0(s))) u_{\varepsilon_n}(s)\, ds\right| \leq \\ \leq \lambda \left(\int\limits_0^t |x_{\varepsilon_n}(s) - x_0(s)|^q\, ds\right)^{1/q} \|u_{\varepsilon_n}\|_{L_p[0,T]} \longrightarrow 0, \varepsilon_n \to 0,\end{gathered} \tag{1.26}$$

в силу рівномірної обмеженості $\|u_{\varepsilon_n}\|_{L_p[0,T]}$. Перейдемо до границі в (1.23) при $\varepsilon_n \to 0$:

$$x_0(t) \in x_0 + \int\limits_0^t f_0(x_0(s))\, ds + \int\limits_0^t f_1(x_0(s)) u_0(s)\, ds,$$

тобто $x_0(t)$ - розв'язок задачі Коші (1.5), а тому в силу єдиності розв'язку $x_0(t) \equiv y(t)$.

Отже, $x_{\varepsilon_n}(t) \rightrightarrows y(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Тому довільна збіжна послідовність функцій із сім'ї збігається до одної і тієї ж границі. Тим самим маємо твердження теореми. $\square$

В силу Зауваження 1.2 маємо, що для функціоналу (1.2) існує мінімізуюча послідовність $\{(x_\varepsilon^{(n)}(t), u_\varepsilon^{(n)}(t))\}_{n\geq 1}$. При цьому $x_\varepsilon^{(n)}(t) \rightrightarrows x_\varepsilon^*(t)$ на $[0,T]$ та $u_\varepsilon^{(n)} \rightharpoonup u_\varepsilon^*$ слабко в $L_p([0,T])$. В силу леми Мазура і властивостей множини V маємо, що $u_\varepsilon^*(t) \in V$ $\forall t \in [0,T]$. Тому згідно прямого методу варіаційного числення задача (1.1), (1.2) має розв'язок.

Далі, проводячи аналогічні міркування до [109, Theorem 2.8], одержимо наступний результат.

Теорема 1.4. Нехай виконані умови 1-4. Тоді задачі (1.1), (1.2) *і* (1.5), (1.6) *мають розв'язки* $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ *і* $(y^*(t), u^*(t))$ *відповідно. При цьому*

1) $J_\varepsilon^* \to J_0^*$, $\varepsilon \to 0$;

2) для будь-якого $\eta > 0$ *існує* ε_0, *таке, що для* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *маємо*

$$|J_\varepsilon^* - L_\varepsilon[u^*]| < \eta; \tag{1.27}$$

3) існує послідовність $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, *така, що*

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightrightarrows y(t) \tag{1.28}$$

рівномірно на $[0,T]$ *і*

$$u_{\varepsilon_n}^* \rightharpoonup u^* \tag{1.29}$$

слабко в $L_p([0,T])$.

Якщо при цьому усереднена задача має (1.5), (1.6) *має єдиний розв'язок, то збідності* (1.27) *і* (1.28) *мають місце для всіх* $\varepsilon \to 0$.

Зауваження 1.3. Аналогічний результат до теореми 1.4 можна одержати для задачі (1.1), (1.3). Більше того, для функціоналу (1.3) твердження (1.29) можна посилити, замінивши слабку збіжність сильною.

1.2 Наближене керування для еволюційного включення на півосі

Розглянемо задачу оптимального керування системою диференціальних включень на півосі з малим параметром і швидко осцилюючими коефіцієнтами

$$\dot{x} \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + f_1(x)u(t), x(0, u(0)) = x_0 \tag{1.30}$$

із критерієм якості

$$J_\varepsilon[x, u] = \int_0^\infty (e^{-jt} A(t, x_\varepsilon(t)) + u^2(t))\, dt \to inf. \tag{1.31}$$

Тут $\varepsilon > 0$ - малий параметр, $j > 0$ - фіксована стала, що характеризує дисконт, x - фазовий вектор в $\mathbb{R}^d$, $u(t) - m$-вимірний вектор керування, який приймає значення у деякій множині $U \subset \mathbb{R}^m$.

Нехай для багатозначної функції f існує рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ середнє

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(t, x)\, dt = f_0(x), \tag{1.32}$$

де інтеграл від багатозначної функції розуміємо в сенсі Аумана ([23]), а границя багатозначної функції розуміється в сенсі Хаусдорфа.

Задачі оптимального керування на півосі (1.30), (1.31) ставиться у відповідність усереднена задача керування:

$$\dot{y} \in f_0(y) + f_1(y)u(t), y(0, u(0)) = x_0 \tag{1.33}$$

із критерієм якості

$$J_0[x,u] = \int\limits_0^\infty (e^{-jt} A(t,y(t)) + u^2(t))\, dt \to inf. \qquad (1.34)$$

Для задачі (1.30), (1.31) і відповідної їй усередненої задачі (1.33), (1.34) будемо вважати виконаними наступні умови:

Умова 1. Допустимими керуваннями будемо вважати m-вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_2([0,\infty))$, що приймають значення у замкненій, опуклій множині $U \subset \mathbb{R}^m$, при цьому вважаємо також, що $0 \in U$.

Умова 2. Аункція $A(t,s)$ визначена при $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, u \in U$, вимірна по t і неперервна по x, причому

$$\exists C > 0: \;\; A(t,x) \geq -C,$$

і задовольняє за $x \in \mathbb{R}^d$ наступну умову росту:

$$\exists K > 0: \;\; |A(t,x)| \leq K(1 + |x|^p)$$

для кожного $t \geq 0$ і $x \in \mathbb{R}^d$, $p \geq 0$.

Умова 3. Багатозначна функція $f(t,x)(f : Q = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\} \to conv(\mathbb{R}^d))$ визначена і неперервна в метриці Хаусдорфа за сукупністю змінних в Q, а матричнозначна функція $f_1(x)$ неперервна по $x \in \mathbb{R}^d$ і виконані наступні умови:

1) $f(t,x)$ в області Q задовольняє умову лінійного росту за x із константами L_1 та L_2, тобто

$$\|f(t,x)\|_+ := \sup_{\xi \in F(t,x)} \|\xi\| \leq L_1 + L_2|x| \qquad \forall (t,x) \in Q;$$

$f_1(x)$ в області $\mathbb{R}^d$ задовольняє умову лінійного росту за x із константами L_3 та L_4, тобто

$$|f_1(x)| \leq L_3 + L_4|x| \qquad ,$$

де

$$j > L_2 p \tag{1.35}$$

2) $f(t,x)$ і $f_1(x)$ в області визначення задовольняють умову Ліпшиця за x рівномірно по t із константами $K_1, K_2 > 0$, відповідно.

Умова 4. Середнє значення багатозначної функції f в сенсі границі (1.32) є однозначною неперервною функцією.

Обгрунтуємо результат стосовно розв'язності збуреної задачі.

Лема 1.1. За виконання умов 1, 2, 3 розв'язок задачі оптимального керування (1.30), (1.31) *існує.*

Доведення. Обгрунтування проведемо в кілька кроків. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$.

Крок 1. Існування розв'язку задачі Коші (1.30).

Із умов 1, 3 та теореми 1 із [17] випливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок $x(t,u)$ задачі Коші (1.30) існує на $[0,+\infty)$ та є абсолютно неперервною функцією. Тому множина допустимих пар задачі (1.30), (1.31) є непорожньою.

Крок 2. Покажемо, що функціонал в (1.31) досягає скінченного екстремуму. Спочатку виведемо апріорну оцінку для $x(t)$. Оскільки x - абсолютно неперервна функція, то $t \mapsto |x(t)|$ - абсолютно неперервна і $\frac{d}{dt}|x(t)| \leq |\dot{x}(t)|$ м.с.

Тому будемо мати:

$$\frac{d}{dt}|x(t)| \leq |\dot{x}(t)| \leq |f(t,x)| + ||f_1(x)|| \cdot |u(t)| \leq L_1 + L_2|x(t)| + (L_3 + L_4|x(t)|) \cdot |u(t)|.$$

Звідки

$$\begin{gathered} |x(t)| \leq |x(0)| + \int_0^t (L_1 + L_2|x(s)| + (L_3 + L_4|x(s)|)|u(s)|)ds \leq \\ \leq |x(0)| + L_1 t + L_3 t^{1/2} ||u||_{L^2} + \int_0^t (L_2 + L_4|u(s)|)|x(s)|ds \end{gathered} \tag{1.36}$$

Застосуємо нерівність Гронуола і отримаємо:

$$|x(t)| \leq \Big(|x(0)| + L_1 t + L_3 t^{1/2} ||u||_{L_2}\Big) e^{\int_0^t (L_2 + L_4 |u(s)|) ds} =$$

$$= \Big(|x(0)| + L_1 t + L_3 t^{1/2} ||u||_{L_2}\Big) e^{L_2 t + L_4 t^{1/2} \cdot ||u||_{L_2}}.$$

Використавши нерівність Юнга, в результаті будемо мати:

$$|x(t)| \leq \Big(|x(0)| + L_1 t + L_3 t^{1/2} ||u||_{L_2}\Big) e^{L_2 t + \frac{\delta}{2} L_4^2 t + \frac{1}{2\delta} ||u||_{L_2}^2}, \tag{1.37}$$

для досить малого $\delta > 0$.

Таким чином, враховуючи нерівність (1.35) та оцінку (1.37), для функціоналу якості будемо мати:

$$|J_\varepsilon[x, u]| \leq \int_0^\infty e^{-jt} (K(1 + |x|^p)) dt + \int_0^\infty u^2(t) dt < \infty.$$

Отже, критерій якості (1.31) має сенс для всіх допустимих керувань.

Крок 3. Нехай $\{(u_n, x_n) \in \Xi\}_{n \in \mathbb{N}}$ - мінімізуюча послідовність задачі (1.30), (1.31), де Ξ - множина допустимих пар задачі (1.30), (1.31):

$$\Xi = \{(u, x) : u \text{ задовольняє умову 1, } x \text{ є розв'язком задачі Коші (1.30)}\},$$

оскільки в силу умови 2 $J_\varepsilon[x, u] \geq -C/j$, то

$$\lim_{n \to \infty} J_\varepsilon[x_n, u_n] = \inf_{(u,x) \in \Xi} J_\varepsilon[x, u] = a_\varepsilon \in (-\infty, +\infty).$$

В силу умов на функцію $A(t, x(t))$ будемо мати, що

$$\int_0^\infty u_n^2(t) dt \leq a_\varepsilon - \int_0^\infty e^{-jt} A(t, x(t)) dt + 1 \leq a_\varepsilon + \frac{C}{j} + 1 =: C_1^\varepsilon.$$

Звідки маємо обмеженість, а відтак і слабку збіжність деякої підпослідовності з $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (для якої для спрощення, не обмежуючи загальності, залишимо ті ж позначення)до деякого елемента u^* в просторі $L_2([0, \infty))$. Належність u^* множині U для кожного $t \geq 0$ випливає із леми Мазура.

В силу оцінки (1.37) та слабкої збіжності послідовності $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в просторі $L_2([0,\infty))$ будемо мати рівномірну обмеженість послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на кожному скінченному інтервалі $[0,T]$, тобто $\exists L>0$:

$$|x_n(t)| \leq L, t \in [0,T]. \tag{1.38}$$

Далі для довільних $t_1 < t_2, t_1, t_2 \in [0,T]$, використовуючи (1.36) та (1.38), будемо мати:

$$|x_n(t_2) - x_n(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} (L_1 + L_2 \cdot L) ds + \int_{t_1}^{t_2} (L_3 + L_4 \cdot L)|u_n(s)| ds \leq$$

$$\leq (L_1 + L_2 \cdot L)(t_2 - t_1) + (L_3 + L_4 \cdot L)(t_2 - t_1)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} |u_n(s)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Із останньої нерівності випливає рівностепенева неперервність послідовності $\{x_n\}$ на кожному $[0,T]$. За теоремою Арцела маємо рівномірну збіжність послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (а точніше, її підпослідовності) до деякого елемента x^* на кожному $[0,T]$, тим самим маємо поточкову збіжність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на $(0,+\infty)$. Міркуваннями, аналогічними до [6, Теорема 3] можна показати, що x^* це розв'язок задачі Коші (1.30). Тому $(u^*(t), x^*(t)) \in \Xi$. В силу напівнеперервності знизу норми в просторі $L_2([0,\infty))$, властивостей функції $A(t,x(t))$, поточкової збіжності послідовності $x_n(t)$ та оцінки (1.37), застосувавши теорему Лебега, будемо мати:

$$\inf_{(u,x)\in\Xi} J_\varepsilon[x,u] = \lim_{n\to\infty} J_\varepsilon[x_n,u_n] = \varliminf_{n\to\infty} J_\varepsilon[x_n,u_n] =$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_n(t)) dt + \int_0^\infty u_n^2(t) dt \right) \geq$$

$$\geq \int_0^\infty e^{-jt} A(t, x^*(t)) dt + \int_0^\infty (u^*)^2(t) dt = J_\varepsilon[x^*, u^*].$$

Таким чином, пара $(u^*(t), x^*(t))$ є оптимальною для задачі (1.30), (1.31). $\square$

Зауваження 1.4. Із властивостей метрики Хаусдорфа будемо мати виконання умови 3 для усередненої функції $f_0(x)$ із тими ж константами, що і для функції $f(t,s)$. Дійсно,

$$\forall \xi \in F(t,x): \ |\xi| \leq L_1 + L_2|x|$$

. Враховуючи, що $dist_H\left(\frac{1}{s}\int\limits_0^s f(t,x)dt, f_0(x)\right) \to 0,\ s \to \infty$, маємо, що $\forall \varepsilon > 0$ $\exists s_0 : \forall s \geq s_0$ отримаємо, що $f_0(x) \in O_\varepsilon\left(\frac{1}{s}\int\limits_0^s f(t,x)dt\right)$. Далі будемо мати:

$$|f_0(x)| \leq \left\|\frac{1}{s}\int\limits_0^s f(t,x)dt\right\|_+ + \varepsilon \leq \frac{1}{s}\int\limits_0^s \|f(t,x)\|_+ dt + \varepsilon \leq L_1 + L_2|x| + \varepsilon.$$

Тим самим маємо виконання пункту 1) умови 3. Аналогічними міркуваннями приходимо до висновку про виконання умови Ліпшиця для $f_0(x)$ з константою K_1. Тому за виконання умови 4 можемо зробити висновок про існування і єдиність розв'язку задачі Коші (1.33) на півосі. Крім того, в силуЛеми 1.2 можна отримати висновок про існування розв'язку для усередненої задачі (1.33), (1.34).

В наступному результаті обгрунтована збіжність оптимальних керувань, оптимальних траєкторій та оптимальних значень критерію якості точної задачі (1.30), (1.31) до відповідних параметрів усередненої задачі (1.33), (1.34).

Теорема 1.5. Нехай $(x^*_\varepsilon(t), u^*_\varepsilon(t))$ *– розв'язок Задачі* (1.30), (1.31). *Тоді для деякого розв'язку* $(y^*(t), u^*(t))$ *задачі* (1.33), (1.34) *маємо:*

1) $J^*_\varepsilon \to J^*_0, \varepsilon \to 0;$, *де* $J^*_\varepsilon = \inf\limits_{x,u \in \Xi_1} J_\varepsilon[x,u]$, $J^*_0 = \inf\limits_{(x,u)\in\Xi_2} J_0[x,u]$, Ξ_1, Ξ_2 *– множини допустимих пар задач* (1.30), (1.31) *та* (1.33), (1.34), *відповідно.*

2) *для кожного* $\eta > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$ *таке, що* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *маємо*

$$|J^*_\varepsilon - J[x^*_\varepsilon, u^*]| < \eta, \tag{1.39}$$

де x^*_ε *– розв'язок задачі Коші* (1.30);

3) існує послідовність $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$ *така, що*

$$x^*_{\varepsilon_n} \to y(t) \tag{1.40}$$

рівномірно на кожному відрізку $[0, T]$ *для довільного* $T > 0$, *а*

$$u^*_{\varepsilon_n} \xrightarrow{w} u^* \tag{1.41}$$

слабко в $L_2([0, \infty))$.

Якщо при цьому усереднена задача (1.33), (1.34) *має єдиний розв'язок, то збіжності* (1.69), (3.101) *мають місце при всіх* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. В силу леми 1.2 розв'язки для задач (1.30), (1.31) та (1.33), (1.34) існують.

Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо

$$J_\varepsilon[x^*_\varepsilon, u^*_\varepsilon] \leq J_\varepsilon[x^*_\varepsilon, 0]. \tag{1.42}$$

В силу умови 2 маємо

$$\int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_\varepsilon(t))dt \geq -\frac{C}{j} \tag{1.43}$$

При $u = 0$ для розв'язку $x_\varepsilon(t)$ задачі Коші (1.30) в силу оцінки (1.37) отримаємо:

$$|x_\varepsilon(t)| \leq (|x_\varepsilon(0)| + L_1 t)e^{L_2 t + \frac{\delta}{2}L_4^2 t}, t \geq 0, \tag{1.44}$$

а тому з умови 2 та (1.35) будемо мати:

$$J_\varepsilon[x_\varepsilon, 0] = \int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_\varepsilon(t))dt \leq \tag{1.45}$$

$$\int_0^\infty e^{-jt} K\Big(1 + (|x_\varepsilon(0)| + L_1 t)^p \cdot e^{L_2 tp + \frac{\delta}{2}L_4^2 tp}\Big)dt \leq c_2.$$

З (1.72) та (1.45) отримаємо:

$$\int_0^{\infty} |u_\varepsilon^*(t)|^2 dt \le c_2 + \frac{c}{j} =: c_3, \tag{1.46}$$

де c_3 не залежить ні від ε, ні від u.

Тому послідовність u_ε^* слабко компактна в $L_2([0,+\infty))$.

Нехай $u_{\varepsilon_n}^*$ - слабко збіжна до u_0 послідовність оптимальних керувань, де u_0 - допустиме керування для задачі (1.33), (1.34). Нехай $x_0(t)$ - розв'язок задачі Коші (1.33) з $u(t) = u_0(t)$. Оскільки зі слабкої збіжності в $L_2([0,\infty))$ випливає слабка збіжність в $L_2([0,T])$ для довільного $T > 0$, то із теореми 3 із [6] отримаємо, що розв'язок $x_{\varepsilon_n}^*(t)$ задачі Коші (1.30) рівномірно на $[0,T]$ прямує до $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. В силу довільності T звідси випливає поточкова збіжність $x_{\varepsilon_n}^*(t)$ до $x_0(t)$ при кожному $t \ge 0$.

Аналогічний результат має місце для розв'язків $x_{\varepsilon_n}^*(t,u^*)$ і $y^*(t)$ задач Коші (1.30) та (1.33) відповідно.

Тоді, з точністю до підпослідовності (див. [5]),

$$J_{\varepsilon_n}^* \le J_0^* + J_{\varepsilon_n}[x_{\varepsilon_n^*}, u^*] - J_0[y^*, u^*]. \tag{1.47}$$

Але

$$\begin{gathered} |J_{\varepsilon_n}[x_{\varepsilon_n^*}, u^*] - J_0[y^*, u^*]| \le \\ \le \int_0^\infty e^{-jt} |A(t, x_{\varepsilon_n^*}(t,u^*) - A(t, y^*(t)))| dt \to 0, \varepsilon_n \to 0 \end{gathered} \tag{1.48}$$

в силу теореми Лебега, оцінки (1.37) та умови росту $A(t,x)$ за x. З іншої сторони,

$$J_0^* \le J_{\varepsilon_n}^* + J_0[y^*, u_{\varepsilon_n}^*] - J_{\varepsilon_n}[x_{\varepsilon_n^*}, u_{\varepsilon_n}^*]. \tag{1.49}$$

Розглянемо допоміжні системи

$$\dot z_{\varepsilon_n} \in f(t, z_{\varepsilon_n}) + f_1(z_{\varepsilon_n}) u_{\varepsilon_n}^* \tag{1.50}$$

і

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0) + f_1(x_0)u_0. \tag{1.51}$$

Застосувавши до них теорему 3 із [6], отримаємо, що $z_n(t)$ рівномірно на $[0,T]$ і поточково на півосі $t \geq 0$ прямує до $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Звідси та із збіжності $x^*_{\varepsilon_n}(t)$ до x_0 отримаємо, що

$$x^*_{\varepsilon_n}(t) - z_{\varepsilon_n} \to 0, \varepsilon_n \to 0 \tag{1.52}$$

для кожного $t \geq 0$.

Тому

$$\begin{aligned} |J_{\varepsilon_n}[x_{\varepsilon^*_n}, u^*_{\varepsilon_n}] - J_0[x_0, u^*_{\varepsilon_n}]| \leq \textstyle\int_0^\infty |A(t, x^*_{\varepsilon_n}(t)) - A(t, x_0(t))|dt+ \\ + \textstyle\int_0^\infty e^{-jt}|A(t, z_{\varepsilon_n}(t)) - A(t, x_0(t))|dt \to 0, \varepsilon_n \to 0 \end{aligned} \tag{1.53}$$

в силу теореми Лебега, оцінок (1.37), (1.73) і умови росту $A(t,x)$ за x. Із (1.74)-(1.76), (1) випливає, що

$$J^*_{\varepsilon_n} \to J^*_0, \varepsilon_n \to 0.$$

Аналогічно до міркувань із [5] приходимо до висновку, що

$$J^*_\varepsilon \to J^*_0, \varepsilon \to 0. \tag{1.54}$$

Звідси маємо перше твердження теореми.

Покажемо, що u_0 - оптимальне керування усередненої задачі. Дійсно,

$$J^*_{\varepsilon_n} = \int_0^\infty e^{-jt} A(t, x^*_{\varepsilon_n}(t))dt + \int_0^\infty |u^*_{\varepsilon_n}(t)|^2 dt. \tag{1.55}$$

Враховуючи тепер умову напівнеперервності знизу норми в $L_2([0, +\infty))$, (3.103), теорему Лебега і перейшовши до границі у (1.82) при $\varepsilon_n \to 0$, будемо мати

$$J^*_0 = \int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_0(t))dt + \varliminf_{\varepsilon_n \to 0} \int_0^\infty |u^*_{\varepsilon_n}(t)|^2 dt \geq \tag{1.56}$$

$$\int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_0(t))dt + \int_0^\infty |u_0(t)|^2 dt.$$

Звідси випливає оптимальність пари (x_0, u_0), що і доводить твердження 3).

Для доведення твердження 2) відзначимо, що

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[x_{\varepsilon_n^*}, u_0]| \leq |J_\varepsilon^* - J_0^*| + |J_0[x_0, u_0] - J_\varepsilon[x_{\varepsilon_n^*}, u_0]|. \tag{1.57}$$

Розглянемо допоміжні системи

$$\dot{x}_\varepsilon \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon\right) + f_1(x_\varepsilon)u_0(t), \tag{1.58}$$

і

$$\dot{y}_0 = f_0(y) + f_1(y)u_0(t). \tag{1.59}$$

Застосуємо теорему 3 [6] до систем (1.58), (1.59), аналогічно (1.75), отримаємо, що

$$J_0[x_0, u_0] - J_\varepsilon[x_{\varepsilon_n^*}, u_0] \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Звідси та із твердження 1) теореми отримаємо твердження 2).

Якщо усереднена задача (1.33), (1.34) має єдиний розв'язок, то з вище наведених міркувань випливає, що з довільної послідовності $(x_{\varepsilon_n}^*, u_{\varepsilon_n}^*)$ виділяється збіжна підпослідовність і всі такі підпослідовності збігаються до однієї і тієї ж границі, звідси будемо мати останнє твердження теореми.

□

1.3 Наближене керування у випадку неіснування класичного середнього значення

В даному підрозділі розглядається задача оптимального керування зі збуреними коефіцієнтами з попереднього підрозділу, але у випадку невиконання умови існування класичного середнього (1.32).

Далі будемо використовувати наступні позначення: $conv(\mathbb{R}^d)$ – множина всіх непорожніх, опуклих, компактних підмножин із $\mathbb{R}^d$. Для $A \subset \mathbb{R}^d$ позначимо $||A||_1 := \sup_{a\in A} ||a||$, coA – опукла оболонка A, $\bar{A}$ – замикання A,

$B_1 := \{x \,|\, ||x|| \leq 1\}$, $O_\delta(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < \delta\}$. Для $f : [0, \infty) \mapsto conv(\mathbb{R}^d)$

$$\int_0^T f(t)dt := \Big\{ \int_0^T l(t)dt \,\Big|\, l \in L^1(0, T; \mathbb{R}^d),\ l(t) \in f(t)\ a.e. \Big\}$$

Розглядається наступна задача оптимального керування

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) \in f(\frac{t}{\varepsilon}, x(t)) + g(x(t))u(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \end{gathered} \tag{1.60}$$

$$u \in U = \{u \in L^2(0, \infty) |\, u(t) \in U \text{ м.с. на } (0, \infty)\} \tag{1.61}$$

така, що

$$J(x, u) = \int_0^\infty (e^{-\gamma t}\varphi(x(t)) + u^2(t))dt \ \to \ \inf \tag{1.62}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр і

1) $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to conv(\mathbb{R}^d)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^d$ відображення $f(\cdot, x)$ має вимірний селектор.

3) $\forall t \geq 0$ відображення $f(t, \cdot)$ є напівнеперервним зверху.

4) $\exists M \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^d\ \forall t \geq 0 \quad ||f(t, x)||_1 \leq M$

5) $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ є неперервним і обмеженим, тобто $\exists N \geq 0$ із $||g(x)|| \leq N, \quad x \in \mathbb{R}^d$

6) $U \subset \mathbb{R}$ є замкненою, опуклою і $0 \in U$

7) $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ є неперервною і існують сталі $c > 0$ і $p \geq 1$ із

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \varphi(x) \geq -c, \quad |\varphi(x)| \leq c(1 + ||x||^p).$$

Лема 1.2. За умов 1)–7) задача оптимального керування (1.60)-(3) *має розв'язок* $\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\}$.

Позначимо

$$J^\varepsilon := \inf J(x, u) = J(x^\varepsilon, u^\varepsilon).$$

Означимо усереднену функцію $\bar{f}$, базуючись на згаданому понятті верхньої границі за Куратовським

$$\bar{f}(x) = \cap_{\delta>0}\bar{F}^{\delta}(x),$$

де $\bar{F}^{\delta}$ – опукла оболонка відображення

$$\Phi^{\delta}(x) = \limsup_{\theta\nearrow 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{(1-\theta)T}I(\theta T, T, x, \delta),$$

$$I(\theta T, T, x, \delta) = \left\{\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \mid v(\cdot)\in L^1_{loc}(0,\infty;\mathbb{R}^d), \quad v(t)\in f(t,y),\ y\in\overline{O_{\delta}(x)}\right\}$$

Можна показати, що якщо існує $\bar{F}(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)dt$ в сенсі метрики Хаусдорфа $dist_H$, і якщо $f(t.\cdot)$ є Ліпшицевою, то $\bar{f}=\bar{F}$.

Ми розглядаємо задачу оптимального керування

$$\dot{x}\in\bar{f}(x)+g(x)u(t), \quad x(0)=x_0, \tag{1.63}$$

$$u\in U \tag{1.64}$$

$$J(x,u)\to\inf \tag{1.65}$$

Нашою метою є доведення того, що для $\varepsilon\to 0$ маємо, що

$$J^{\varepsilon}\to\bar{J} \text{ and } \{x^{\varepsilon},u^{\varepsilon}\}\to\{\bar{x},\bar{u}\} \text{ в певному сенсі},$$

де $\{\bar{x},\bar{u}\}$ is a solution of (1.63)-(1.65), $\bar{J}=J(\bar{x},\bar{u})$.

Проаналізуємо задачу (1.60). За умов 1)-5) для кожного $u\in L^2(0,\infty)$ і $\varepsilon>0$ задача (1.60) має розв'язок і має місце наступна оцінка

$$\frac{d}{dx}||x(t)|| \le ||\dot{x}(t)|| \le M+N|u(t)| \quad \text{м.в.} \tag{1.66}$$

$$||x(t)|| \le ||x_0|| + (M+N)t + N||u||^2, \tag{1.67}$$

де $||u||^2 = \int_0^\infty u^2(t)dt$. Більше того, для фіксованого $\varepsilon > 0$, якщо x_n це розв'язок, що відповідає керуванню u_n, $n \in \mathbb{N}$ і $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||u_n|| < \infty$, то з точністю до підпослідовності має місце наступна збіжність

$$u_n \stackrel{w}{\to} u \text{ in } L^2(0,\infty) \tag{1.68}$$

$$x_n \stackrel{w}{\to} x \text{ в } C([0,T];\mathbb{R}^d), \quad T > 0 \tag{1.69}$$

де x це розв'язок задачі (1.60) з керуванням u. Додатково, якщо $u_n \in U$ для $n \in \mathbb{N}$ then $u \in U$.

Наступний результат є певним узагальненням класичної апроксимаційної теореми про наближення напівнеперервної функції ліпшицевими многозначними відображеннями.

Лема 1.3. Нехай $f : [0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to conv(\mathbb{R}^d)$ *задовольняє 1)-4). Тоді існує послідовність локально Ліпшицевих відображень* $f^k : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to conv(\mathbb{R}^d)$, *що задовольняють 1)-4) для* $k \in \mathbb{N}$ *із*

$$f(t,x) \subset \cdots \subset f^{k+1}(t,x) \subset f^k(t,x), \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ k \in \mathbb{N} \tag{1.70}$$

і для кожного $k \in \mathbb{N}$ *і* $x \in \mathbb{R}^d$ *існують* $l_k \geq 0$ *і* $\delta_k \geq 0$ *такі, що*

$$dist_H(f^k(t,x'), f^k(t,x'')) \leq l_k\|x' - x''\|, \quad x', x'' \in O_{\delta_k}(x),\ t \geq 0, \tag{1.71}$$

більше того, для довільного $\varepsilon > 0,\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d$ *існує* $K = K(\varepsilon,t,x)$ *із*

$$f^k(t,x) \subset \overline{co} f(t, O_\varepsilon(x)), \quad k \geq K. \tag{1.72}$$

Доведення. Нехай $\{O_{r_k}(y_i^k)\}_{i=1}^\infty$ це локально скінченне покриття $\mathbb{R}^d$, де $r_k := \frac{1}{3^{k-1}}$, $k \in \mathbb{N}$. Нехай $\{\psi_i^k\}_{i=1}^\infty$ це розбиття одиниці, підпорядковане цьому покриттю і складається із локально Ліпшицевих функцій $\operatorname{supp}\psi_i^k \subset O_{r_k}(z_i^k)$, див. [8]. Для довільного $k \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathbb{R}^d$ існують $\delta = \delta(x) > 0$ і $l(x) > 0$ такі, що

$$N(k,x) := \{i \in \mathbb{N} |\ O_{r_k}(y_i^k) \cap O_\delta(x) \neq \emptyset\}$$

є скінченним для довільного $x, x'' \in O_\delta(x)$

$$\sum_{i\in N(k,y)} |\psi_i^k(x') - \psi_i^k(x'')| \le l(x)\|x' - x''\|.$$

Тоді відображення

$$f^k(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^k(x) \cdot \overline{co} f(t, O_{2r_k}(y_i^k)) = \sum_{i\in N(k,y)} \psi_i^k(x) \cdot \overline{co} f(t, O_{2r_k}(y_i^k))$$

задовольняє 1)-4), (3.101),(1.71). Нарешті, для довільного $\varepsilon > 0$ виберемо $K = K(\varepsilon, t, x)$ таке, що

$$r_k < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k \ge K.$$

Тоді для довільного $i \in N(k,y)$ і довільного $z \in O_{2r_k}(y_i^k)$ отримаємо

$$\|z - x\| \le \|z - y_i^k\| \le \|z - y_i^k\| + \|y_i^k - x\| \le 2r_k + r_k < \varepsilon.$$

Отже, $f(t, O_{2r_k}(y_i^k)) \subset f(t, O_\varepsilon(x))$ і $f^k(t,x) \subset \overline{co} f(t, O_\varepsilon(x))$ □

Лема 1.4. Нехай $\varepsilon_n \to 0$ для $n \to \infty$ і x_n це розв'язок (1.60) *з керуванням u_n. Нехай $(x_n, u_n) \to (x, u)$ для $n \to \infty$ в сенсі* (1.68),(1.69). *Тоді x це розв'язок* (1.63) *з керуванням u.*

Доведення. Нехай f^k це Ліпшицеве відображення із леми 1.3. Тоді для довільного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$\dot{x}_n(t) \in f^k\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, x_n(t)\right) + g(x_n(t))u_n(t) \quad \text{м.в.}$$

Зафіксуємо τ_1 таке, що похідна $\dot{x}(\tau_1)$ існує і нехай τ_1 це точка Лебега для $g(x(\cdot))u(\cdot)$. Тоді для довільного $n \ge N(x(\tau_1))$ і для досить малого $|s - \tau_1|$ отримаємо $\|x_n(s) - x(\tau_1)\| < \delta_k$ і

$$x_n(\tau_2) - x_n(\tau_1) \in \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[f^k\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(\tau_1)\right) + l_k \|x_n(s) - x(\tau_1)\| \cdot B_1 \right] ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x_n(s))u_n(s)ds,$$

де l_k із (1.71). Тоді

$$x_n(\tau_2) - x_n(\tau_1) \in \int_{\tau_1}^{\tau_2} f^k(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(\tau_1))ds + l_k \int_{\tau_1}^{\tau_2} k\|x_n(s) - x(\tau_1)\|ds \cdot B_1$$

$$+l_k \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|x_n(\tau_1) - x(\tau_1)\|\| \cdot B_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x_n(s))u_n(s) - g(x(s))u(s)ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x(s))u(s)ds$$

Нехай $\eta > 0$ – довільне маленьке. Тоді для досить малих $|\tau_2 - \tau_1|$ і досить великих $n \in \mathbb{N}$ в силу (1.66) отримуємо

$$l_k \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|x_n(s) - x(\tau_1)\|ds \leq l_k \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{s} (M + N|u_n(t)|)dt\, ds$$

$$\leq l_k \int_{\tau_1}^{\tau_2} M(\tau_2 - \tau_1) + N\sqrt{\tau_2 - \tau_1}\|u_n\|dt < -\frac{\eta}{2}(\tau_2 - \tau_1).$$

Тоді

$$\frac{x_n(\tau_2) - x_n(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \in \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f^k(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(\tau_1))ds + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x_n(t))u_n(t)dt + \eta B_1$$

$$\frac{x_n(\tau_2) - x_n(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \in \frac{\varepsilon_n}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\frac{\tau_1}{\varepsilon_n}}^{\frac{\tau_2}{\varepsilon_n}} f^k(s, x(\tau_1))ds + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x_n(t))u_n(t)dt + \eta B_1$$

і, перейшовши до границі для $n \to \infty$, отримаємо

$$\frac{x(\tau_2) - x(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \in \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2})T} \int_{\frac{\tau_1}{\tau_2}T}^{T} f^k(s, x(\tau_1))ds + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x(t))u(t)dt + \eta B_1.$$

Далі, перейшовши до границі для $\tau_2 \to \tau_1$ і, оскільки η довільне мале, то ми одержимо

$$\dot{x}(\tau_1) \in \limsup_{\theta\to 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{(1-\theta)T} \int_{\theta T}^{T} \int_{\theta T}^{T} f^k(s, x(\tau_1))ds + g(x(\tau_1))u(\tau_1). \quad (1.73)$$

Із опуклості інтегралу [7] і в силу (1.72) отримуємо, що для довільного $\delta > 0$ і $x \in \mathbb{R}^d$ існує $K = K(\delta, x)$ із

$$\limsup_{\theta\to 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{(1-\theta)T} \int_{\theta T}^{T} f^k(s, x)ds \subset \bar{F}^{\delta}(x), \quad k \geq K.$$

Нарешті, із (1.73) отримаємо для довільного $\delta > 0$, що

$$\dot{x}(\tau_1) \in \bar{F}^{\delta}(x(\tau_1)) + g(x(\tau_1))u(\tau_1)$$

і, оскільки

$$\dot{x}(\tau_1) \in \bar{f}^{\delta}(x(\tau_1)) + g(x(\tau_1))u(\tau_1),$$

що доводить лему. $\square$

Тепер можемо обгрунтувати наш основний результат.

Теорема 1.6. Припустимо, що умови 1)-7) виконуються. Нехай для довільного $u \in U$ задача (1.63) *має єдиний розв'язок. Нехай $(x^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$ це оптимальна пара для* (1.60)-(3), $J^{\varepsilon} = J(x^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$. *Тоді*

$$J^{\varepsilon} \to \bar{J} \quad for \quad \varepsilon \to 0 \tag{1.74}$$

і для $\varepsilon_n \to 0$ маємо, що

$$x^{\varepsilon_n} \to \bar{x} \quad in \quad C([0,T];\mathbb{R}^d), \quad T > 0 \tag{1.75}$$

$$u^{\varepsilon_n} \xrightarrow{w} \bar{u} \quad in \quad L^2(0,\infty), \tag{1.76}$$

де $(\bar{x}, \bar{u})$ – оптимальна пара для (1.63)-(1.65), $\bar{J} = J(\bar{x}, \bar{u})$.

Доведення. Нехай для $\varepsilon_n \to$ оптимальною парою для (1.60)-(3) є $(x^{\varepsilon_n}, u_n^{\varepsilon})$. Із лптимальності u_n^{ε} випливає, що

$$J(x^{\varepsilon_n}, u_n^{\varepsilon}) \le J(x_n, 0),$$

де x_n – розв'язок (1.60) із $\varepsilon = \varepsilon_n$, $u = 0$. Тоді в силу (1.67)

$$\frac{c}{\gamma} + \|u_n^{\varepsilon}\|^2 \le \int_0^{\infty} e^{-\gamma t}\varphi(x_n(t)) \le \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} C(1+(\|x_0\|+(M+N)t)^p)dt \le C_1, \tag{1.77}$$

де C_1 не залежить від n. Додатково, із (1.66) маємо

$$\|x_n^{\varepsilon}(t) - x_n^{\varepsilon}(s)\| \le M|t-s| + N|t-s|^{\frac{1}{2}}\|u_n^{\varepsilon}\|. \tag{1.78}$$

Із оцінок (1.77),(1.78) і теореми Арцела-Асколі випливає, що по підпослідовності $(x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}),\ n \in \mathbb{N}$ збігається до деяких $(\bar{x}, \bar{u})$ в сенсі (1.75),(1.76). Отже, із леми 1.4 отримаємо, що $\bar{x}$ є розв'язком (1.63) із керуванням $u \in U$. Доведемо, що $(\bar{x}, \bar{u})$ є оптимальною парою.

Для кожного $u \in U$ і відповідного розв'язку x_n задачі (1.60) маємо

$$J(x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \le J(x_n, u). \tag{1.79}$$

Міркуючи аналогічно доведенню леми 1.2, із (1.79), перейшовши до границі, будемо мати:

$$J(\bar{x}, \bar{u}) \le \lim \inf_{n\to\infty} J(x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \le \lim \inf_{n\to\infty} J(x_n, u) \tag{1.80}$$

В силу (1.78) із u_n^{ε}, замінюючи на u, отримаємо, що $x_n \to x$ в сенсі (1.75). Із леми 1.4 випливає, що x є розв'язком (1.63) із керуванням u. Тому із (1) випливає

$$J(\bar{x}, \bar{u}) \le \lim \inf_{n\to\infty} J^{\varepsilon_n} \le \lim \sup_{n\to\infty} \le \lim_{n\to\infty} J(x_n, \bar{u}) = J(\bar{x}, \bar{u}).$$

Це означає, що існує $\lim_{n\to\infty} J^{\varepsilon_n} = J(\bar{x}, \bar{u})$. В силу довільності $\varepsilon_n \to 0$, отримаємо (1.74). $\square$

Приклад. Розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{cases} \dot{x} \in \begin{cases} \psi_1(\frac{t}{\varepsilon}), & x < 0 \\ \left[\psi_2(\frac{t}{\varepsilon}), \psi_1(\frac{t}{\varepsilon})\right], & x = 0 \\ \psi_2(\frac{t}{\varepsilon}), & x > 0 \end{cases} + u(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{1.81}$$

$$u \in U, \quad J(x, u) = \int_0^\infty e^{-t}\varphi(x) + u^2(t)\, dt \to \inf$$

Припустимо, що ψ_1, ψ_2 є обмеженими і

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi_1(t) = \psi_1 > 0, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi_2(t) = \psi_2 < 0.$$

Легко бачити, що багатозначне відображення

$$f(t,x)=\begin{cases}\psi_1(t), & x<0\\ \big[\psi_2(t),\psi_1(t)\big], & x=0\\ \psi_2(t), & x>0\end{cases}$$

і $g=1, U, \varphi$ задовольняють умови 1)-7). Зауважимо, що $f(t,\cdot)$ не є Ліпшицевою функцією.

Усереднена задача має форму

$$\begin{cases}\dot{x}\in\begin{cases}\psi_1, & x<0\\ \big[\psi_1,\psi_2\big], & x=0\\ \psi_2, & x>0\end{cases} + u(t)\\ x(0)=0\\ u\in U\\ J(x,u)\to\inf\end{cases} \tag{1.82}$$

де задача Коші має єдиний розв'язок для кожного $u\in U$, [9]. В силу теореми, послідовність оптимальних пар $(x^{\varepsilon},u^{\varepsilon})$ для (3.103) збігається до $(\bar{x},\bar{u})$, де $(\bar{x},\bar{u})$ є оптимальною парою задачі (1.82).

1.4 Наближене керування для параболічного рівняння зі збуреннями в коефіцієнтах

В циліндрі $Q_T=(0,T)\times\Omega$, де $\Omega\ \subseteq R^n$- обмежена область, розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{cases}\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}=\Delta y(t,x)\ +f(t/\varepsilon,y(t,x))+g(y(t,x))u(t,x),\\ y|_{\partial\Omega}=0,\\ y|_{t=0}=y_0(x),\end{cases} \tag{1.83}$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \tag{1.84}$$

$$J(y,u) = \int\limits_{\Omega} q(x, y(T,x))dx + \int\limits_{Q_T} u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{1.85}$$

де $f : R_+ \times R \to R$, $g : R \to R$ - неперервні функції, і для деяких додатних констант $C_i, i = 1,2,3$, та функцій $K_1 \in L^2(\Omega)$, $K_2 \in L^1(\Omega)$ виконуються умови:

$$\forall\ t \geq 0,\ \forall\ y \in R \quad |f(t,y)| \leq C_1(1+|y|), \tag{1.86}$$

$$\forall\ y \in R \quad |g(y)| \leq C_2, \tag{1.87}$$

$$U \text{ замкнена та опукла } , 0 \in U, \tag{1.88}$$

$q : \Omega \times R \to R$ – функція Каратеодорі,

$$|q(x,\xi)| \leq C_3\,|\xi| + K_1(x),\ q(x,\xi) \geq K_2(x). \tag{1.89}$$

В ході досліджень доведено, що за припущень (1.86)–(1.89) задача оптимального керування (1.83)–(1.85) має розв'язк $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$, де y^ε – слабкий розв'язок (1) з керуванням $u = u^\varepsilon$. При цьому умови (1.86)–(1.89) не гарантують єдиності такого розв'язку.

Далі робиться припущення про те, що рівномірно по $y \in R$ існує границя

$$\bar{f}(y) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(s,y)ds. \tag{1.90}$$

Основним результатом досліджень є встановлення збіжності

$$J(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \to J(\bar{y}, \bar{u}),\ \varepsilon \to 0, \tag{1.91}$$

де $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ – оптимальний процес у задачі (1.83)–(1.85) із усередненою функцією $\bar{f}$.

Для встановлення цього результату вивчимо властивості розв'язків. Для $u \in L^2(Q_T)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ ми будемо розглядати розв'язок (1.83) у слабкому сенсі, тобто $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ такий, що $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ $\forall \eta \in C_0^\infty(0,T)$

$$-\int_0^T (y,\varphi)\eta' + \int_0^T (\nabla y, \nabla\varphi)\eta = \int_0^T (f(\frac{t}{\varepsilon},y),\varphi)\eta + \int_0^T (g(y)u,\varphi)\eta, \tag{1.92}$$

де тут і надалі через $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ будемо позначати норму і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

За рахунок включення $\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ кожен розв'язок (1.83) належить $C([0,+\infty);L^2(\Omega))$. Відомо [38], що $\forall y_0 \in L^2(\Omega)$ існує принаймні один слабкий розв'язок (1.83) з $y(0,x) = y_0(x)$. Крім того, має місце наступна оцінка: для майже всіх (м.в.) $t \in (0,T)$

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 + \|\nabla y(t)\|^2 \le C_4(1 + \|y(t)\|^2 + \|u(t)\|^2), \tag{1.93}$$

$\forall t \in [0,T]$

$$\|y(t)\| \le C_5(1 + \|y_0\| + \|u\|_{Q_T}), \tag{1.94}$$

де ми позначили $\|u\|_{Q_T} := \int\limits_{Q_T} u^2(t,x)dtdx$.

Лема 1.5. За умов (1.86)–(1.89) *задача* (1.83)–(1.85) *для кожного* $\varepsilon > 0$ *має принаймні один розв'язок* $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$.

Доведення. Розглянемо мінімізуючу послідовність $\{u_n, y_n\}$. Відповідно до (1.89) послідовність $\{u_n\}$ обмежена в $L^2(Q_T)$, а отже по підпослідовності

$$u_n \to u \text{ слабо в } L^2(Q_T).$$

Тоді з (1.93), (1.94) виводимо, що

$$\{y_n\} \text{ обмежена в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1),$$
$$\left\{\frac{\partial y_n}{\partial t}\right\} \text{ обмежена в } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{1.95}$$

Отже, з леми про компактність [38] маємо

$$y_n \to y \text{ in } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ та майже скрізь в } Q_T. \tag{1.96}$$

Використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, ми переходимо до границі в рівності (1.92), записаній для y_n, і отримуємо, що y є розв'язком (1.83) з керуванням u. Після цього стандартні міркування [8], пов'язані зі слабкою напівнеперервністю знизу і коерцитивністю цільового функціоналу J, дозволяють нам стверджувати, що $\{y,u\}$ є розв'язком (1.83)–(1.85). Лема доведена.

Тепер розглянемо усереднену задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + \bar{f}(y) + g(y)u, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0, \end{cases} \tag{1.97}$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \tag{1.98}$$

$$J(y,u) = \int\limits_{\Omega} q(x, y(T,x))dx + \int\limits_{Q_T} u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{1.99}$$

де неперервна функція $\bar{f} : R \to R$ визначена у (1.90).

Легко побачити, що $\bar{f}$ задовольняє (1.86), тому задача (1.97)–(1.99) має принаймні один розв'язок $\{\bar{y},\bar{u}\}$.

Теорема 1.7. Нехай виконуються умови (1.86)–(1.90)*, і, крім того,*

$$\forall u \in U \text{ задача } (1.97) \text{ має єдиний розв'язок}, \tag{1.100}$$

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ t \geq 0$$

$$|y - z| < \delta \ \Rightarrow\ |f(t,y) - f(t,z)| < \epsilon \tag{1.101}$$

Тоді

$$J(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \to J(\bar{y},\bar{u}) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{1.102}$$

Доведення. Нехай $\varepsilon_n \to 0$, $\{y_n, u_n\} := \{y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}\}$ оптимальний процес у (1.83)–(1.85) для $\varepsilon = \varepsilon_n$. Завдяки (1.89) та оптимальності $\{y_n, u_u\}$ отримуємо

$$\int\limits_{\Omega} K_2(x)dx + \int\limits_{Q_T} u_n^2(t,x)dtdx \leq J(z_n, 0) \leq C_3 \int\limits_{\Omega} |z_n(T,x)|^2 dx + \int\limits_{\Omega} K_1(x)dx,$$

де z_n розв'язок (1.83) з $\varepsilon = \varepsilon_n$, $u \equiv 0$.

З оцінки (1.94), застосованою до z_n, виводимо що $\{u_n\}$ обмежена в $L^2(Q_T)$. Отже, ми можемо повторити міркування леми 1.5 і зробити висновок про те, що для декого $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ до підпослідовності:

$$u_n \to \bar{u} \text{ слабко в } L^2(Q_T)$$

$$y_n \to \bar{y} \text{ в } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ та м.с. в } Q_T. \tag{1.103}$$

Доведемо, що $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ задавольняє (1.97).

З теореми Лебега про мажоровану збіжність отримуємо

$$g(y_n) \to g(\bar{y}) \text{ in } L^2(Q_T). \tag{1.104}$$

З (1.95) отримаємо

$$y_n \to \bar{y} \text{ слабко в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{1.105}$$

Покажемо, що $\forall\,\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\forall\,\eta \in C_0^\infty(0,T)$

$$\int\limits_{Q_T} f(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t,x))\varphi(x)\eta(t)dtdx \to \int\limits_{Q_T} \bar{f}(\bar{y}(t,x))\varphi(x)\eta(t)dtdx \tag{1.106}$$

Позначимо $Q_T^R = \{(t,x) \in Q_T |\, |\bar{y}(t,x)| \geq R\}$, μ - міра Лебега в R^2. Тоді

$$\mu(Q_T^R) \to 0,\ R \to \infty,$$

і існує послідовність кусково сталих функцій

$$y^M(t,x) = \sum_{k=1}^{M} y_k^M \cdot \chi_{A_k^M}(t,x)$$

така, що

$$y^M(t,x) \to \bar{y}(t,x) \text{ для м.в. } (t,x) \in Q_T,$$

$$y^M \to \bar{y} \text{ рівномірно на } Q_T \backslash Q_T^R. \tag{1.107}$$

Більше того, для кожного $\delta > 0$ існує $Q_T^\delta \subset Q_T$ така, що

$$\mu(Q_T^\delta) < \delta \text{ та } y_n \to \bar{y} \text{ рівномірно на } Q_T \backslash Q_T^\delta. \tag{1.108}$$

Далі

$$\int\limits_{Q_T} \left| f(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t,x))\varphi(x)\eta(t) - \bar{f}(\bar{y}(t,x))\varphi(x)\eta(t) \right| dtdx \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q_T} \left| f(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t,x)) - f(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t,x)) \right| |\varphi(x)| \, |\eta(t)| \, dtdx +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} \left| f(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t,x)) - \bar{f}(\bar{y}(t,x)) \right| |\varphi(x)| \, |\eta(t)| \, dtdx =: I_1 + I_2.$$

$$I_1 \leq \int\limits_{Q_T \backslash Q_T^\delta} \left| f(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t,x)) - f(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t,x)) \right| |\varphi(x)| \, |\eta(t)| \, dtdx +$$

$$+ \int\limits_{Q_T^\delta} C_1(2 + |y_n(t,x)| + |\bar{y}(t,x)|) \, |\varphi(x)| \, |\eta(t)| \, dtdx =: I_1^{(1)} + I_1^{(2)}$$

З (1.94) маємо

$$\|y_n\|_{Q_T} + \|\bar{y}\|_{Q_T} \leq C_6. \tag{1.109}$$

Далі з (1.108), (1.109) і нерівності Гельдера

$$\forall \delta > 0 \; \forall n \geq 1 \quad I_1^{(1)} \leq C_7 \cdot \delta^{\frac{1}{2}} \tag{1.110}$$

З умови (1.101) виводимо, що $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \lambda > 0 \; \forall t \in [0,T]$

$$\forall n \geq 1 \; \forall \xi, \, z, \, |\xi - z| < \lambda : \; \left| f(\frac{t}{\varepsilon_n}, \xi) - f(\frac{t}{\varepsilon_n}, z) \right| < \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall\delta>0\ \ \exists N_1\ \forall n\geq N_1\ I_1^{(2)}\leq\delta.$$

Для кожної функції $y^M(t,x)$ маємо

$$\int\limits_{Q_T}\left|f(\frac{t}{\varepsilon_n},y^M(t,x))-\bar f(y^M(t,x))\right||\varphi(x)|\,|\eta(t)|\,dtdx=$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\int\limits_{A_k^M}\left|f(\frac{t}{\varepsilon_n},y_k^M)-\bar f(y_k^M)\right||\varphi(x)|\,|\eta(t)|\,dtdx\leq$$

$$\sum_{k=1}^{M}\int\limits_0^T\left|f(\frac{t}{\varepsilon_n},y_k^M)-\bar f(y_k^M)\right||\eta(t)|\,dt\cdot\int\limits_{\Omega}|\varphi(x)|\,dx\to0,\ n\to\infty$$

Для кожного $R>0$ існує M_R таке, що $\forall M\geq M_R\ \forall n\geq1$

$$\int\limits_{Q_T/Q_T^R}\left|f(\frac{t}{\varepsilon_n},\bar y(t,x))-f(\frac{t}{\varepsilon_n},y^M(t,x))\right||\varphi(x)|\,|\eta(t)|\,dtdx<\delta,$$

$$\int\limits_{Q_T\setminus Q_T^R}\left|\bar f(\bar y(t,x))-\bar f(y^M(t,x))\right||\varphi(x)|\,|\eta(t)|\,dtdx<\delta.$$

Таким чином, вибираючи R таким, що $\mu(Q_T^R)<\delta$, отримуємо

$$I_2\leq\int\limits_{Q_T^R}2C_1(1+|\bar y(t,x)|)\,|\varphi(x)|\,|\eta(t)|\,dxdt+2\delta+$$

$$+\sum_{k=1}^{M_R}\int\limits_0^T\left|f(\frac{t}{\varepsilon_n},y_k^{M_r})-\bar f(y_k^{M_r})\right||\eta(t)|\,dt\cdot\int\limits_{\Omega}|\varphi(x)|\,dx\leq C_8\delta^{\frac{1}{2}}+3\delta\quad\forall n\geq N_2(R)$$

Об'єднавши всі ці нерівності, отримаємо (1.106).

Тоді (1.103)–(1.106) дає нам необхідний результат про те, що $\{\bar y,\bar u\}$ задовольняє (1.97).

Доведемо, що $\{\bar y,\bar u\}$ є оптимальним процесом у (1.97)–(1.99).

Для кожного $u \in U$ і відповідного розв'язку y_n задачі (1) маємо

$$J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \le J(y_n, u).$$

Міркуючи так само, як і в леми 1, ми отримуємо, що по підпослідовності

$$y_n \to y \ \text{ у } \ \text{сенсі } (1.95), (1.96),$$

і y є в силу (1.100) єдиним розв'язком (1.97) для відповідного керування u.

Після переходу до границі отримуємо

$$\begin{cases} \underline{\lim}\, J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \ge J(\bar{y}, \bar{u}), \\ \overline{\lim}\, J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \le J(y, u). \end{cases} \tag{1.111}$$

Отже, $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ є оптимальним процесом у (1.97)–(1.99).

Якщо ми покладемо $u = \bar{u}$ у попередніх міркуваннях, ми отримаємо з (1.111)

$$J(\bar{y}, \bar{u}) \le \underline{\lim}\, J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \le \overline{\lim}\, J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \le J\,(\bar{y}, \bar{u}).$$

З цих нерівностей випливає (1.91). Теорема доведена.

1.5 Наближений синтез для нелінійно-збуреного еволюційного рівняння параболічного типу

В цьому підрозділі вивчена задача наближеного оптимального синтезу, тобто керування в формі оберненого зв'язку (регулятора), для задачі оптимального керування розв'язками параболічного з правою частиною виду $\epsilon F(y)$, де $\epsilon > 0-$ малий параметр, та з коерцитивним цільовим функціоналом. Використавши формулу оптимального регулятора незбуреної задачі, обгрунтовано форму наближеного регулятора з переключенням для вихідної задачі.

Нехай задано трійку гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактними та щільними вкладеннями. Позначимо через $\|\cdot\|$ та $(\cdot, \cdot)$ норму та скалярний добуток в просторі H відповідно. Позначимо через $\|\cdot\|_V$ норму в просторі V. Нехай при цьому

$$\forall u \in V \; \|u\| \leq c \, \|u\|_V \, .$$

Розглянемо задачу:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = \epsilon F(y) + u(t), t \in [0, T] \\ y|_{t=0} = y_0 \in H \end{cases} \tag{1.112}$$

$$u(t) \in U = \{v \in H | |(v, X)| \leq \xi\} \subset H \tag{1.113}$$

$$J(y, u) = \|y(T)\|^2 + \gamma \int_0^T \|y(t)\|^2 \, dt \to inf \tag{1.114}$$

Тут $\epsilon \in (0, 1)-$ малий параметр, $X \in H-$ фіксований елемент, $\xi > 0$ та $\gamma > 0-$ константи, $A : V \to V^*-$ лінійний неперервний самоспряжений оператор,

$$\langle Au, u \rangle \geq v_1 \, \|u\|_V^2 \, , \tag{1.115}$$

нелінійне відображення $F : H \to H-$ неперервне і таке, що збурена задача для кожного $u(t) \in U$ має єдиний розв'язок. Наприклад, це виконується, якщо $F : H \to H$ локально ліпшецеве, тобто

$$\forall R > 0 \; \exists C(R) > 0 \; \forall y, z \in H, \|y\| \leq R, \|z\| \leq R \;\; \|F(y) - F(z)\| \leq C(R) \, \|y - z\| \, . \tag{1.116}$$

За виконання цих умов відомо, що задача оптимального керування для всіх $\epsilon \in (0, 1)$ має розв'язок. При цьому для незберенної задачі (тобто при $\epsilon = 0$) для широкого класу початкових даних і параметрів вдається знайти формулу оптимального керування в формі оберненого зв'язку. А саме, формула оптимального параметричного синтезу має вигляд:

$$u(t, y) = \begin{cases} -\alpha(t)(y, x), \quad t \in [0, \tau] \\ -\xi, \quad t \in [\tau, T] \end{cases} \tag{1.117}$$

де $\tau-$ корінь рівняння

$$\alpha(\tau)(y(\tau), x) = \xi, \tag{1.118}$$

$y(\cdot)-$ розв‘язок (1.112) при $\epsilon = 0$ з керуванням $u = -\alpha(t)(y, x)$.

Зауважимо, що точка τ визначається як момент виходу керування на обмеження.

Основна мета роботи полягає в тому, щоб показати, що формула (1.117) визначає керування в формі обмеженного зв'язку, яке з одного боку, є близьким до оптимального при достатньо малих значеннях параметра ϵ, а з іншого, враховує можливий вихід наближеного керування на обмеження.

Роглянемо задачу (1.112) при $\epsilon = 0$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = u(t), t \in [0, T] \\ y|_{t=0} = y_0 \in H \end{cases} \tag{1.119}$$

$$u(t) \in U = \{v \in H | |(v, X)| \le \xi\} \tag{1.120}$$

$$J(y, u) = \|y(T)\|^2 + \gamma \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \to inf \tag{1.121}$$

Вважатимемо, що $X = X_1$, де тут і надалі $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, +\infty), \{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V-$ розв'язки спектральної задачі

$$AX = \lambda X, \quad X \in V.$$

Тоді задача розщеплюється на скінченну кількість одновимірних лінійно квадратичних задач вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} + \lambda_i y_i = u_i(t) \\ y_i|_{t=0} = (y_0, X_i) \\ \|y_i(T)\|^2 + \gamma \int_0^T u_i^2(t)dt \to inf, \end{cases} \tag{1.122}$$

перша з яких має обмеження на керування:

$$|u_1(t)| \leq \xi. \tag{1.123}$$

Використовуючи необхідні і достатні умови оптимальності [15], можна показати, що за виконання умов

$$\frac{|(y_0, X_1)|e^{-2\lambda_1 T}}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\lambda_1}(1 - e^{-2\lambda_1 T})} < \xi_1, \quad \frac{|(y_0, X_1)|e^{-2\lambda_1 T}}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\lambda_1}(1 - e^{-2\lambda_1 T})} > \xi_1 \tag{1.124}$$

оптимальний регулятор незбуреної задачі має вигляд:

$$u(t,y) = \begin{cases} -\sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i(t)(y, X_i)X_i - \alpha(t)(y, X_1)X_1, \ t \in [0, \tau] \\ -\sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i(t)(y, X_i)X_i - \xi X_1, \ t \in [\tau, T], \end{cases} \tag{1.125}$$

де $\tau = \tau_0$– корінь рівняння

$$\alpha(\tau)(y(\tau), X_1) = \xi, \tag{1.126}$$

функції $\alpha_i(t), i \geq 2$ та $\alpha(t) = \alpha_1(t)$ визначаються рівністю:

$$\alpha_i(t) = \frac{e^{2\lambda_i(t-T)}}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\lambda_i}(1 - e^{2\lambda_i(t-T)})}, i \geq 1 \tag{1.127}$$

Для прикладу розглянемо тепловий процес:

$$A = -\Delta, V = H_0^1(0, \pi), \ H = L^2(0, \pi)$$

$$U = \left\{ v \in L^2(o,\pi) | \left| \int_0^\pi v(x) \sin x dx \right| \le \xi \right\}, \tag{1.128}$$

$X_i(x) = \sin ix, \lambda_i = i^2$ і умови (1.124) гарантовано виконуються для наступної множини початкових даних $T > 0,\ \xi > 0, \gamma > 0, y_0 \in L^2(0,\pi)$:

$$\xi \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} \right) e^T \le \int_0^\pi y_0(x) \sin x dx \le \frac{\xi e^{2T}}{\gamma}$$

Далі обгрунтуємо процедуру наближеного регулятора. Спочатку зауважемо, що вказані умови забезпечуються для вихідної збуреної задачі існування розв'язку

$$\{\overline{y}^\epsilon, \overline{u}^\epsilon\} \in W(0,T) \times L^2(0,T,H),$$

де $W(0,T) = \{y \in L^2(0,T;W) | \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T,V^*)\}$. Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = \epsilon F(y) - \sum_{i=1}^\infty \alpha_i(t)(y, X_i)X_i, \\ y|_{t=0} = y_0. \end{cases} \tag{1.129}$$

Відзначимо, що для довільного $i \ge 1$ функції $\alpha_i(\cdot)$ монотонно зростають та задовольняють нерівностям $0 \le \alpha_i(t) \le \gamma$. Тоді відображення $F_1 : [0,T] \times H \to H$, визначине формулою:

$$F_1(t,y) = -\sum_{i=1}^\infty \alpha_i(t)(y, X_i)X_i,$$

є неперервним по t і глобально ліпшицевим по y. Тоді задача (1.129) є одночасно розв'язною в $W(0,T)$, тобто існує єдиний розв'язок задачі (1.129) $y^\epsilon \in W(0,T)$.

Теорема 1.8. Нехай початкові дані задовольняють умови (1.124). Тоді для достатньо малих $\epsilon > 0$ рівняння

$$\alpha(\tau)(y^\epsilon(\tau), X) = \xi$$

має корінь $\tau = \tau_\epsilon$.

Більш того, справедлива нерівність.

$$|\tau_{\epsilon-\tau_0}| \leq K\epsilon$$

для деякої сталої K>0, що не залежить від ϵ.

Наступна теорема є основним результатом підрозділу і обгрунтовує наближений синтез у вихідній збуреній задачі (1.112).

Теорема 1.9. Регулятор, визначений формулою (1.125), з точкою переключення $\tau = \tau_\epsilon$ *з попередньої теореми є наближеним до оптимального в такому сенсі: для будь-якого* $\delta > 0$ *існує таке значення* $\epsilon_0 > 0$, *що для всіх* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, *справедливо, що:*

$$|J(\overline{y}^\epsilon, \overline{u}^\epsilon) - J(y^\epsilon, u^\epsilon(t, y^\epsilon))| < \delta,$$

де y^ϵ*− розв'язок задачі (1.112) з керуванням* $u^\epsilon(t, y^\epsilon)$.

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що

$$J(\overline{y}^\epsilon, \overline{u}^\epsilon) \to J(\overline{y}, \overline{u}), \epsilon \to 0, \tag{1.130}$$

$$J(y^\epsilon, u^\epsilon(t, y^\epsilon)) \to J(\overline{y}, \overline{u}), \epsilon \to 0, \tag{1.131}$$

де $\{\overline{y}, \overline{u}\}$− оптимальний процес незбуреної задачі. Відзначимо, що виконання останньої збіжності випливає з того, що для вихідної задачі для всіх $t \in [0, T]$:

$$\overline{u}(t) = u(t, \overline{y}(t)) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t)(\overline{y}(t), x_i)x_i, \ t \in [0, \tau_0], \\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t)(\overline{y}(t), x_i)x_i - \xi x_1, \ t \in [\tau_0, T], \end{cases}$$

де τ_0− корінь рівняння $\alpha(\tau)(\overline{y}(\tau), x) = \xi$. Оскільки $\tau_\epsilon \to \tau_0$ при $\epsilon \to 0$, то справедливо, що $y^\epsilon(\tau_\epsilon) \to y(\tau_0)$ при $\epsilon \to 0$. Тоді отримуємо, що $y = \overline{y}$. Отже

$$u^\epsilon(t, y^\epsilon(t)) \to u(t, \overline{y}(t))$$

в просторі $L^2(0,T;H)$ при $\epsilon \to 0$, звідки й отримуємо шукане.

Доведемо тепер першу граничну рівність. З коерцетивності функціоналу J випливає, що з точністю до послідовності справедлива збіжність:

$\overline{u}^\epsilon \to \widehat{u}$ при $\epsilon \to 0$ слабко в просторі $L^2(0,T;H)$. Тоді з [8] отримуємо, що

$\overline{y^\epsilon} \to \widehat{y}$ при $\epsilon \to 0$ слабко в просторі $C([0,T];H)$, де $\widehat{y}-$ розв'язок незбуреної задачі з керуванням $\widehat{u}$. При цьому для всіх $u \in U$

$$J(\overline{y}^{-\epsilon}, \overline{u}^{-\epsilon}) \leq J(y^\epsilon, u).$$

Проводячи аналогічні попереднім міркування, отримаємо, що $y^\epsilon \to \epsilon$ при $\epsilon \to 0$ слабко в просторі $C([0,T];H)$, де $y-$ єдиний розв'язок задачі з керуванням u. Тоді

$$\underline{\lim} J(\overline{y}^\epsilon, \overline{u}^\epsilon) \geq J(\widehat{y}, \widehat{u}).$$

Крім того,

$$\overline{\lim} J(\overline{y}^\epsilon, \overline{u}^\epsilon) \leq J(y^\epsilon, u) = J(y, u).$$

Таким чином, процес $(\widehat{y}, \widehat{u})$ є оптимальним. Теорему доведено. $\square$

РОЗДІЛ 2 ЯКІСНА ПОВЕДІНКА ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ

2.1 Рівномірні атрактори дисипативних імпульсно-збурених систем

Припустимо, що маємо еволюційну неперервну систему, тобто сім'ю K неперервних відображень $\varphi : [0, +\infty) \to X$ таких, що

(A1) $\forall x \in X \ \exists \varphi \in K$ such that $\varphi(0) = x$;

(A2) $\forall \varphi \in K \ \forall \tau \geq 0 \ \varphi(\cdot + \tau) \in K$.

В застосуваннях сім'я K породжується автономним еволюційним рівнянням, що є глобально розв'язним в фазовому просторі X. Єдиність розв'язку не припускається.

Імпульсна система $\{K, M, I\}$ це еволюційна система така, що фазова точка $x(t)$ рухається вздовж траєкторій K поки не досягне фіксованої підмножини $M \subset X$, що називається імпульсною множиною. В цей момент τ (що не є фіксованим і залежить від конкретної траєкторії) фазова точка "стрибає" в нове положення $x^+(\tau) \in Ix(\tau)$, де $I : M \to X$ називається імпульсним відображенням. Після цього фазова точка x продовжує свій рух вздовж траєкторії K до наступної зустрічі із M. Тривіальний приклад – м'яч, що підстрибує, описується фазовим вектором $\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$, де "стрибки" означають миттєву зміну $\dot{x}$, коли x досягає певної поверхні M. За відповідних припущень (див. означення 2.1 нижче) така імпульсна система може бути розглянута як багатозначна (розривна) динамічна система. Якщо ця система є дисипативною, то її гранична поведінка може бути описана дослідженням властивостей рывномірного атрактора - мінімальної компактної рівномірно притягаючої множини у фазовому просторі. Основною метою данного підрозділу є надати ефективні достатні умови для дослідження таких множин в термінах K, M, I. Отримані умови в наступних підрозділах ми застосовуємо до вивчення якісної поведінки імпульсних ситем породжених еволюційними задачами реакції-дифузії та імпульсно-збуреними хвильовими рівняннями.

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – банахів простір; $P(X)(\beta(X))$ – множина всіх непорожніх (непорожніх обмежених) підмножин простору X. Нехай K – еволюційна неперервна система на X,

$$K_x = \{\varphi \in K : \ \varphi(0) = x\}\,;$$

$M \subset X$ – імпуьсна множина; $I : M \to P(X)$ – імпульсне відображення. Для $x \in M$ позначимо через x^+ деякий елемент Ix. Для $\varphi \in K$ позначимо $M^+(\varphi) = \bigcup\limits_{t>0} \varphi(t) \bigcap M$. В точках “стрибків” ми припускаємо неперервність справа для імпульсних траєкторій. Для коректної визначеності нашої імпульсної задачі припустимо виконання наступних умов.

(A3) $M \subset X$ is closed, $I : M \to P(X)$ є замкненозначним;

(A4) $M \bigcap IM = \emptyset$;

(A5) $\forall x \in M\ \forall \varphi \in K_x\ \exists \tau = \tau(\varphi) > 0$ таке, що $\forall t \in (0, \tau)\ \varphi(t) \notin M$.

Ці припущення дозволяють нам стверджувати [49], що для кожного $\varphi \in K$ або $M^+(\varphi) = \emptyset$ або $\exists s = s(\varphi) > 0$ таке, що $\varphi(s) \in M$ і $\varphi(t) \notin M\ \forall t \in (0, s)$. Ця функція $s : K \to (0, +\infty]$ (покладемо $s(\varphi) = +\infty$ if $M^+(\varphi) = \emptyset$) гратиме важливу роль в подальшому. Зокрема, вона дозволяє означити імпульсну траєкторію $\widetilde{\varphi}$.

То ж, нехай $x_0 \in X$ і $\varphi_0 \in K_{x_0}$ – довільні. Якщо $s(\varphi_0) = +\infty$, тоді $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi_0(t)$ $\forall t \geq 0$. В іншому випадку, покладемо $s_0 = s(\varphi_0)$, і

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in [0, s_0) \\ x_1^+ \in I\varphi_0(s_0), & t = s_0. \end{cases}$$

Нехай $\varphi_1 \in K_{x_1^+}$. Якщо $s(\varphi_1) = +\infty$, тоді $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi_1(t - s_0)$ $\forall t \geq s_0$. В іншому випадку, покладемо $s_1 = s(\varphi_1)$, і

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi_1(t - s_0), & t \in [s_0, s_0 + s_1) \\ x_2^+ \in I\varphi_1(s_1), & t = s_0 + s_1. \end{cases}$$

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо імпульсну траєкторію $\widetilde{\varphi}$ зі скінченною або нескінченною кількістю імпульсних точок $\{x_n^+\}_{n\geq 1} \subset IM$, відповідні часові інтервали між стрибками $\{s_n\}_{n\geq 0}$, і функції $\{\varphi_n\}_{n\geq 0} \subset K$, такі, що $\forall n \geq 0$ $\forall t \geq 0$

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi_n(t - t_n), & t \in [t_n, t_{n+1}) \\ x_{n+1}^+ \in I\varphi_n(s_n), & t = t_{n+1}, \end{cases}$$

де $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} s_k$.

Позначимо через $\widetilde{K}$ ($\widetilde{K}_x$) множину всіх (починаючи із x) імпульсних траєкторій. Припустимо виконання наступних умов.

(A6) $\forall x \in X$, $\forall \widetilde{\varphi} \in \widetilde{K}_x$:

$\widetilde{\varphi}$ визначена на $[0, +\infty)$, тобто або кількість стрибків є не більш ніж скінченною (включаючи неімпульсний випадок), або $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n = \infty$.

Зауваження 2.1. Згідно нашої побудови імпульсна траєкторія може стартувати із M, але не може належати M в довільний момент часу, тобто

$$\forall x \in X \;\; \forall \widetilde{\varphi} \in \widetilde{K}_x \;\; \forall t > 0 : \quad \widetilde{\varphi}(t) \notin M.$$

Означення 2.1. Багатозначне відображення $\widetilde{G} : [0, +\infty) \times X \to P(X)$ задане, як

$$\widetilde{G}(t,x) = \{\widetilde{\varphi}(t) : \ \widetilde{\varphi} \in \widetilde{K}_x\}, \tag{2.1}$$

називається імпульсною (або розривною) багатозначною динамічною системою. Можна показати [48], що $\widetilde{G}$ є багатозначним напівпотоком (м-напівпотоком), тобто

$$\forall x \in X \ \ \widetilde{G}(0,x) = x,$$

$$\forall t, s \geq 0 \ \ \widetilde{G}(t+s,x) \subseteq \widetilde{G}(t, \widetilde{G}(s,x)).$$

В останньому вкладенні рівність має місце, якщо $\forall \varphi, \psi \in K$ таких, що $\varphi(0) = \psi(s)$ функція конкатенації $\theta(p) = \begin{cases} \psi(p), & p \in [0,s) \\ \varphi(p-s), & p \geq s \end{cases}$ належить K.

Означення 2.2. Компактна множина $\Theta \subset X$ називається рівномірним атрактором м-напівпотоку $\widetilde{G}$, якщо Θ є рівномірно притягуючою множиною, тобто $\forall B \in \beta(X)$

$$dist(\widetilde{G}(t,B), \Theta) \to 0 \ \ \text{as } t \to \infty,$$

і Θ є мінімальною множиною серед усіх замкнених рівномірно притягуючих множин.

Зауваження 2.2. В класичній теорії динамічних систем (де $\widetilde{G}$ є однозначним і неперервним відображенням) рівномірний атрактор співпадає із глобальним атрактором, тобто компактною, інваріантною, рівномірно притягуючою множиною. Як було показано у [87] ми не можемо очікувати інваріантність атрактора в імпульсному випадку.

Наступна лема забезпечує критерій того, що дисипативний напівпотік має рівномірний атрактор.

Лема 2.1. [38] Припустимо, що м-напівпотік $\widetilde{G}$ є дисипативним, тобто існує $B_0 \in \beta(X)$ таке, що для кожної підмножини $B \in \beta(X)$ існує момент *часу* $T = T(B) > 0$*:*

$$\forall t \geq T(B) \ \ \widetilde{G}(t, B) \subset B_0.$$

Тоді $\widetilde{G}$ *має рівномірний атрактор тоді і лише тоді, коли* $\widetilde{G}$ *є асимптотично компактним, тобто* $\forall t_n \nearrow \infty$ *і для всіх обмежених послідовностей* $\{x_n\} \in \beta(X)$ *кожна послідовність* $\{\xi_n = \widetilde{G}(t_n, x_n)\}$ *має збіжну підпослідовність.*

В застосуваннях дисипативність може бути перевірена (можуть з'явитися лише технічні труднощі) за допомогою апріорних оцінок для траєкторій K. Але перевірка асимптотичної компактності для нескінченновимірної імпульсної задачі є набагато делікатнішою проблемою. Ця властивість може не виконуватись навіть у найпростіших випадках.

Приклад 2.1. Розглянемо наступну параболічну задачу в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \triangle \varphi \\ \varphi|_{\partial \Omega} = 0. \end{cases}$$

В фазовому просторі $X = L^2(\Omega)$ із L^2-нормою $\|\cdot\|$ ця задача є однозначно глобально розв'язною, і глобально експоненційно стійкою, тобто

$$\forall t \geq 0 \ \ \|\varphi(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t}\|\varphi_0\|,$$

де $\lambda_1 > 0$ – це перше власне число оператора $-\triangle$ в H_0^1.

Розглянемо імпульсні параметри:

$$M = \{\varphi \in X : \ \|\varphi\| = \varepsilon\}, \ \ \varepsilon > 0$$

$$I : M \to X, \ \ I\varphi = (1 + \mu)\varphi, \ \ \mu > 0$$

Можна довести [86], що $\forall \varepsilon > 0$ і $\forall \mu > 0$ така імпульсна система задовольняє припущення (A1) – (A6), і є дисипативною. Але вона не є асимптотично компактною. Отже, не має рівномірного атрактора.

Причиною є те, що кожна траєкторія зустрічає імпульсну множину M надто часто, тому множина імпульсних точок не є компактною.

Для подальшого розгляду нам потрібно додаткові припущення, що виконуються для більшості еволюційних систем K.

(A7) Для довільної послідовності $\{x_n\}$, $x_n \to x$ при $n \to \infty$, і для довільної $\varphi_n \in K_{x_n}$ існує $\varphi \in K_x$ таке, що по деякій підпослідовності $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ $\forall t \geq 0$.

(A8) $\forall r > 0$ $\exists c_1(r)$ таке, що $\forall x, \|x\| \leq r$, $\forall \varphi \in K_x$, and $\forall t \geq 0$: $\|\varphi(t)\| \leq c_1(r)$.

Лема 2.2. Припустимо, що імпульсна система $\{K, M, I\}$ задовольняє умови (A1) – (A8), відповідний м-напівпотік $\widetilde{G}$ є дисипативним, і існує компактно вкладений простір $Y \Subset X$ такий, що:

(A9) $\forall t > 0$, $\forall r > 0$ існує $c_2(t, r)$ таке, що $\forall x$, $\|x\| \leq r$ і $\forall \varphi \in K_x$ виконується

$$\|\varphi(t)\|_Y \leq c_2(t, r);$$

(A10) $\forall r > 0$ $\exists c_3(r)$ таке, що $\forall x \in M \bigcap Y$, $\|x\|_Y \leq r$ і $\forall x^+ \in Ix$ виконується

$$\|x^+\|_Y \leq c_3(r);$$

(A11) $\exists \overline{s} > 0$ таке, що $\forall x \in I(M \bigcap Y)$, $\forall \varphi \in K_x$ виконується $s(\varphi) \geq \overline{s}$.

Тоді імпульсний м-напівпотік $\widetilde{G}$ має рівномірний атрактор.

Зауваження 2.3. З $Y \Subset X$ випливає, що $\exists \alpha > 0$ таке, що $\forall x \in Y$ $\|x\| \leq \alpha \|x\|_Y$, і якщо $\|x_n\|_Y \leq c$, тоді з точністю до підпослідовності $x_n \to x$ в X.

Зауваження 2.4. Припущення (A9) означає, що K породжує компактну напівгрупу.

Доведення. З дисипативності м-напівпотоку $\widetilde{G}$ випливає, що $\forall r > 0$ $\exists T(r)$ таке, що $\forall x$, $\|x\| \leq r$, $\forall \widetilde{\varphi} \in \widetilde{K}_x$, і $\forall t \geq T(r)$: $\|\widetilde{\varphi}(t)\| \leq R_0$. Більше того, поєднуючи (A8), (A10), і (A11) отримуємо, що $\exists c(r)$ таке, що $\forall t \in [0, T(r)]$ $\|\widetilde{\varphi}(t)\| \leq c(r)$. Тому можемо зробити висновок, що:

$$\forall r > 0 \; \exists c(r) \text{ таке, що } \forall x, \|x\| \leq r, \; \forall \widetilde{\varphi} \in \widetilde{K}_x, \; \forall t \geq 0$$

$$\|\widetilde{\varphi}(t)\| \leq c(r) + R_0 =: D(r) \tag{2.2}$$

В силу леми 2.1 нам потрібно довести, що множина:

$$\{\xi_m = \widetilde{\varphi}_m(t_m) : \; \widetilde{\varphi}_m \in \widetilde{K}_{x_m}, \; \|x_m\| \leq r, \; t_m \nearrow \infty\}$$

є передкомпактною в X.

Тому, ми розглядаємо імпульсну траєкторію $\widetilde{\varphi}_m$, що складається із імпульсних точок $\{x_n^{(m)+}\}_{n\geq 1} \subset I(M \bigcap Y)$, часових інтервалів $\{s_n^{(m)}\}_{n\geq 0}$, і функцій $\{\varphi_n^{(m)}\}_{n\geq 0} \subset K$. Ми маємо наступні альтернативи.

a) Якщо $t_m < s_{(0)}^{(m)} = s\left(\varphi_{(0)}^{(m)}\right) \leq \infty$, тоді

$$\xi_m = \widetilde{\varphi}_m(t_m) = \varphi_0^{(m)}(t_m) = \varphi_0^{(m)}(1 + t_m - 1),$$

$$\varphi_0^{(m)}(\cdot + t_m - 1) \in K_{\varphi_0^{(m)}(t_m - 1)},$$

$$\|\varphi_0^{(m)}(t_m - 1)\| \leq D(r).$$

Отже, в силу (A9) матимемо, що

$$\|\xi_m\|_Y \leq c_2(1, D(r)).$$

Тому $\{\xi_m\}$ є передкомпактною в X.

b) Якщо $t_m = s(\varphi_0^{(m)})$, тоді $\xi_m = \widetilde{\varphi}_m(t_m) \in I\varphi_0^{(m)}(t_m)$. Тому в силу (A10) $\|\xi_m\|_Y \leq c_3(c_2(1, D(r)))$, і $\{\xi_m\}$ є передкомпактною в X.

c) Якщо $t_m > s(\varphi_0^{(m)})$, тоді для деякого $n = n(m) \geq 1$

$$\xi_m = \widetilde{\varphi}_m(t_m) = \varphi_n^{(m)}\left(t_m - \sum_{k=0}^{m} s_k^m\right), \quad \varphi_n^{(m)} \in K_{x_n^{(m)+}},$$

або $\xi_m = x_{n+1}^{(m)+}$, і в силу (2.2) і (A10), $\forall n \geq 1$

$$\|x_n^{(m)+}\|_Y \leq c_3(D(r)).$$

Позначимо $\tau_m = t_m - \sum\limits_{k=0}^{m} s_k^m$, $\eta_m = x_n^{(m)+}$. Тоді з точністю до підпослідовності $\eta_m \to \eta$ в X.

Якщо $\tau_m \to \tau \geq 0$, тоді в силу (A7) для деякого $\varphi \in K_\eta$ з точністю до підпослідовності

$$\varphi_n^{(m)}(\tau_m) \to \varphi(\tau) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Отже, $\{\xi_m\}$ є передкомпактною.

В іншому випадку $\tau_m \to \infty$. Тоді, міркуючи аналогічним чином до початку доведення, отримуємо

$$\|\xi_m\|_Y \leq c_2\left(1, D(r)\right).$$

Лема 2.3. Припустимо, що імпульсна система $\{K, M, I\}$ задовольняє умови (A1) – (A8), відповідний м-напівпотік $\widetilde{G}$ є дисипативним, і існує компактно вкладений простір $Y \Subset X$ такий, що:

(A9') $\forall x \in X$, $\forall \varphi \in K_x$, and $\forall t \geq 0$,

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t),$$

де

$$\|\varphi_1(t)\|_Y \leq c_4\left(\|x\|\right), \quad c_4(\cdot) \quad \textit{є неперервною на} \quad [0, +\infty],$$

$$\|\varphi_2(t)\| \leq c_5\|x\|e^{-\delta t}, \quad \textit{де } \delta > 0, \ \textit{і } c_5 \geq 0 \ \textit{є сталими;}$$

(A10') $\exists \overline{x} \in X\colon \forall r > 0\ \exists c_6(r)$ *таке, що* $\forall x \in M$, $\|x\| \le r$, *і* $\forall x^+ \in Ix$ *виконуеться*

$$\|x^+ - \overline{x}\|_Y \le c_6(r);$$

(A11') $\exists \overline{s} > 0$ *таке, що* $\forall x \in IM$, $\forall \varphi \in K_x$ *виконуеться* $s(\varphi) \ge \overline{s}$.

Тоді імпульсний м-напівпотік $\widetilde{G}$ *має рівномірний атрактор.*

Зауваження 2.5. Припущення (A9') означає, що K породжує асимптотично компактну напівгрупу.

Доведення. Альтернативи a) – c) доведення є такими ж як у доведенні леми 2.2. Розглянемо імпульсну траєкторію $\widetilde{\varphi}_m$ з компонентами $\left\{x_n^{(m)+}\right\}_{n\ge1} \subset IM$, $\left\{s_n^{(m)}\right\}_{n\ge0}$, $\left\{\varphi_n^{(m)}\right\}_{n\ge0} \subset K$, $\|\widetilde{\varphi}_m(0)\| \le r$, і (2.2) виконується.

a) Якщо $t_m < s_0^{(m)} = s(\varphi_0^m) \le \infty$, тоді в силу (A9')

$$\xi_m = \widetilde{\varphi}_m(t_m) = \varphi_0^{(m)}(t_m) = \left(\varphi_0^{(m)}\right)_1(t_m) + \left(\varphi_0^{(m)}\right)_2(t_m),$$

де $\|\left(\varphi_0^{(m)}\right)_1(t_m)\|_Y \le c_4(r)$, $\|\left(\varphi_0^{(m)}\right)_2(t_m)\| \le c_5 r e^{-\delta t_m}$.

Тому перший доданок має збіжну підпослідовнсть, а другий доданок прямує до нуля при $m \to \infty$. Тому $\{\xi_m\}$ є передкомпактною.

b) Якщо $t_m = s_0^{(m)}$, тоді

$$\xi_m = \widetilde{\varphi}(t_m) \in I\varphi_0^{(m)}(t_m).$$

В силу випадку a) ми маємо, що

$$\|\varphi_0^{(m)}(t_m)\| \le \alpha c_4(r) + c_5 r.$$

Тому із (A11')

$$\|\xi_m - \overline{x}\|_Y \le c_6\left(\alpha c_4(r) + c_5 r\right).$$

Це означає передкомпактність $\{\xi_n\}$ в X.

c) Якщо $t_m > s\left(\varphi_0^{(m)}\right)$, тоді для деякого $n = n(m) \geq 1$

$$\xi_m = \widetilde{\varphi}(t_m) = \varphi_n^{(m)}(\tau_m), \quad \varphi_n^{(m)} \in K_{\eta_m},$$

де $\tau_m = t_m - \sum\limits_{k=0}^{m} s_k^{(m)}$, $\eta_m = x_n^{(m)+}$.

В силу (A10'):

$$\|\eta_m - \overline{x}\|_Y \leq c_6\left(D(r)\right).$$

Тому з точністю жо підпослідовності $\eta_m \to \eta$ в X. Після цього ми можемо повторити міркування із леми 2.2 і закінчити доведення.

2.2 Застосування до імпульсної системи реакція-дифузія

Розглядається система типу реакції-дифузії

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A\triangle u + \varepsilon f(u), \quad t > 0, \ \ x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ є обмеженою областю, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $u = (u_1, \ldots, u_N)^T$ – невідома вектор-функція, A є $N \times N$-вимірною матрицею з додатньо симетричною частиною $\frac{A+A^T}{2} \geq \beta I, \quad \beta > 0$, $f = (f_1, \ldots, f_N)^T$ є неперервною нелінійною вектор-функцією взаємодії,

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^N} \|f(u)\|_{\mathbb{R}^N} \leq C. \tag{2.4}$$

Відомо [38], що за таких припущень для кожного $u(0) \in X = \left(L^2(\Omega)\right)^N$ існує (можливо неєдиний) глобальний слабкий розв'язок задачі (2.3), і кожний слабкий розв'язок належить $\mathbb{C}\left([0, +\infty), X\right)$.

Розглянемо наступну імпульсну задачу.

$$M = \left\{ u \in X : \quad \sum_{i=1}^{N} (u_i, \psi)^2 = 1 \right\},$$

де ψ вибирається як один із розв'язків спектральної задачі

$$\triangle\psi = -\lambda\psi, \ \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Покладемо $L = \{\overline{c}\psi : \ \ \overline{c} \in \mathbb{R}^N\}$. Тоді $X = L \oplus L^\perp$ і покладемо для $u \in M$, $u = \overline{c}\psi + u^\perp$, $u^\perp \in L^\perp$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \overline{c}_i^2 = 1$

$$I(u) = \left\{ v = \overline{d}\psi + u^\perp : \ \ \sum_{i=1}^{N} \overline{d}_i^2 = 1 + \mu \right\}.$$

Зауваження 2.6. У випадку $N = 1$ описана імпульсна задача складається із зростаючої в $1 + \mu$ разів величини $(u, \psi)^2$.

Нехай K – множина глобальних слабких розв'язків задачі (2.3).

Теорема 2.1. Імпульсна система $\{K, M, I\}$ *має рівномірний атрактор в фазовому просторі* X.

Доведення. Перевіримо припущення із леми 2.2. Впродовж доведення стала C означатиме сталу, що залежить від параметрів (2.3).

Відомо, що K задовольняє (A1), (A2), (A7), (A8). Більше того, для кожного $u \in K$

$$\forall t \geq 0 \ \ \|u(t)\|_X^2 \leq \|u(0)\|_X^2 e^{-\beta t} + 1 \tag{2.5}$$

Додатково для $Y = \left(H_0^1(\Omega)\right)^N \Subset X$ припущення (A9) виконується. Візьмемо $u \in M \bigcap Y$. Тоді

$$\|u\|_Y^2 = \|\overline{c}\psi\|_Y^2 + \|u^\perp\|_Y^2.$$

І для довільного $u^+ \in I(u)$

$$\|u^+\|_Y^2 = \|\overline{d}\psi\|_Y^2 + \|u^\perp\|_Y^2.$$

Тому, якщо $\|u\|_Y^2 \leq r^2$, тоді

$$\|u^+\|_Y^2 \leq r^2 + \|\psi\|_Y^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \overline{d}_i^2 - \sum_{i=1}^{N} \overline{c}_i^2 \right) \leq r^2 + \mu\|\psi\|_Y^2.$$

Отже, (A10) виконується.

Також легко бачити, що $M \subset X$ є замкненою, $\forall u \in X$ $I(u)$ є замкненим, $M \bigcap IM = \emptyset$. Тому (A3) і A(4) мають місце.

Для перевірки інших припущень нам потрібен більш детальний аналіз нашої системи. Розглянемо наступні позначення:

$$\overline{v}(t) = \begin{pmatrix} (u_1(t), \psi) \\ \dots \\ (u_N(t), \psi) \end{pmatrix}, \quad \overline{f}(u(t)) = \begin{pmatrix} (f_1(u), \psi) \\ \dots \\ (f_N(u), \psi) \end{pmatrix}.$$

Тоді із (2.3) отримаємо

$$\frac{d}{dt}\overline{v}(t) + \lambda A\overline{v}(t) = \varepsilon \overline{f}(u(t)). \tag{2.6}$$

І після множення на $\overline{v}(t)$ in $\mathbb{R}^N$ отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}(t)\|^2_{\mathbb{R}^N} + \lambda \left(A\overline{v}(t), \overline{v}(t)\right)_{\mathbb{R}^N} = \varepsilon \left(\overline{f}(u(t)), \overline{v}(t)\right)_{\mathbb{R}^N}$$

Отже,

$$\frac{d}{dt}\|\overline{v}(t)\|^2_{\mathbb{R}^N} + \lambda \left(\left(A + A^T\right) \overline{v}(t), \overline{v}(t)\right)_{\mathbb{R}^N} = 2\varepsilon \left(\overline{f}(u(t)), \overline{v}(t)\right)_{\mathbb{R}^N}. \tag{2.7}$$

Тому $\forall t \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{N} (u_i(t), \psi)^2 \leq \sum_{i=1}^{N} (u_i(0), \psi)^2 e^{-\beta\lambda t} + \varepsilon^2 C. \tag{2.8}$$

Тепер розглянемо

$$g_\varepsilon(t) = \|\overline{v}(t)\|^2_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i=1}^{N} (u_i(t), \psi)^2.$$

Тут індекс ε означає, що $u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))^T$ є розв'язком задачі (2.3) із $\varepsilon > 0$.

Припустимо, що $u_0 \in M$. Тоді $g_\varepsilon(0) = 1$, і в силу (2.7) маємо, що

$$g_\varepsilon^{'}(0) \leq -2\beta\lambda + 2\varepsilon C. \tag{2.9}$$

Нерівність (2.9) означає, що для досить малих $\varepsilon > 0$ є справедливим, що $g_\varepsilon'(0) \leq -\beta\lambda$. Тому для таких $\varepsilon > 0$ $\exists \tau = \tau(u_0, \varepsilon)$: $\forall t \in (0, \tau)$ $g_\varepsilon(t) < 1$. Отже, (A5) виконується.

Тепер візьмемо $u_0 \in IM$. Припустимо, що $s_\varepsilon > 0$ – перша зустріч M і $u \in K_{u_0}$. Тоді $g_\varepsilon(s_\varepsilon) = 1$, тобто в силу (2.7)

$$1 + \lambda \int_0^{s_\varepsilon} \left(\left(A + A^T \right) \overline{v}(t), \overline{v}(t) \right)_{\mathbb{R}^N} = 1 + \mu + 2\varepsilon \int_0^{s_\varepsilon} \left(\overline{f}(u(t)), \overline{v}(t) \right)_{\mathbb{R}^N}$$

В силу (2.8) $\forall t \in [0, s_\varepsilon]$

$$\|\overline{v}(t)\|^2_{\mathbb{R}^N} \leq 1 + \mu + \varepsilon^2 C \leq 2 + \mu$$

для досить малих ε.

Тому

$$| \left(\left(A + A^T \right) \overline{v}(t), \overline{v}(t) \right)_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} | \leq 2\|A\|(2 + \mu),$$

and

$$2\lambda\|A\|(2 + \mu)s_\varepsilon \geq \mu - 2\varepsilon C\sqrt{2 + \mu} s_\varepsilon.$$

Нарешті,

$$s_\varepsilon \geq \frac{\mu}{2\lambda\|A\|(2 + \mu) + 2C\sqrt{2 + \mu}} =: \overline{s} \tag{2.10}$$

Отже, (A11) виконується.

Залишилось довести властивість дисипативності. Розглянемо $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{K}_{u_0}$ with $\|u_0\| \leq r$.

Якщо $\widetilde{\varphi}$ не має імпульсного збурення, тоді із (2.5)

$$\forall t \geq T = \frac{2}{\beta} \ln r : \quad \|\widetilde{\varphi}(t)\|_X \leq \sqrt{2}. \tag{2.11}$$

В іншому випадку, не втрачаючи загальності, можемо припустити, що $u_0 \in IM$, $\|u_0\| \leq r$, and $\widetilde{\varphi}$ має стрибки в моменти $\{s_0, s_0 + s_1, \ldots\}$ з імпульсними точками

$\{y_i^+\}_{i\geq 1}$. Тоді, використовуючи (2.10) і нерівність $\|u^+\| = \|u\|^2 + \mu \ \forall u \in M$, маємо, що для $k \geq 0$

$$\|u_{k+1}^+\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-\beta(k+1)\bar{s}} + (1+\mu)\sum_{i=0}^{k} e^{-\beta i \bar{s}}. \tag{2.12}$$

Поєднуючи (2.11) і (2.12), отримаємо потрібну дисипативність. Теорема доведена.

2.1 Застосування до імпульсно-збуреного хвильового рівняння

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t - \Delta u + \varepsilon f(u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Тут $\beta > 0$ – коефіцієнт дисипації, $\varepsilon \in (0,1)$ – малий параметр,

$$sup\{|f(u)| + |f'(u)| \quad | \quad u \in \mathbb{R}\} \leq c$$

Ці умови гарантують [150] однозначну глобальну розв'язність задачі (2.13) у фазовому просторі $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ в такому сенсі: для будь-яких початкових даних $z_0 = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in E$ існує єдиний розв'язок задачі (2.13) $z = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C([0,+\infty); E)$, а відповідна напівгрупа $V : \mathbb{R}_+ \times E \to E$, $V(t, z_0) = z(t)$ є неперервною, задовольняє для деяких сталих $_1 > 0$, $_2 > 0$, $\delta_1 > 0$ оцінку:

$$\forall t \geq 0 \quad ||z(t)||_E^2 \leq K_1 ||z(0)||_E^2 e^{-\delta_1 t} + K_2 \varepsilon, \tag{2.14}$$

та допускає декомпозицію вигляду:

$$||V_1(t,z)||_{E_1} \leq c_1(r) \tag{2.15}$$

$$V_2(t,z) = V_2(t)z,\ V_2(t) \in L(E,E),\ ||V_2(t)||_{L(E)} \le c_2 e^(-\delta t) \qquad (2.16)$$

з простором $E_1 = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$. Розглянемо енергетичний функціонал $l_p : E \to \mathbb{R}$ вигляду:

$$l_p(z) = \left(\sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i (u,\psi_i)^2 + (v,\psi_i)^2\} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E,$$

де $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0,+\infty)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ – власні числа та власні вектори оператора $-\Delta$ в просторі $H_0^1(\Omega)$. На траєкторіях задачі (2.13) розглянемо таку імпульсну задачу: фазова точка $z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{pmatrix}$ при зустрічі з імпульсною множиною:

$$M = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E : l_p(z) = a,\ ||u||_{H_0^1(\Omega)} \le \gamma \right\}, \gamma < a \qquad (2.17)$$

переводиться в нове положення $z^+ = Iz$, що належить множині:

$$M' = \{ z \in E : l_p(z) = a(1+\mu) \}, \qquad (2.18)$$

де імпульсне відображення $I : M \to M'$ має вигляд:

$$\text{для } z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M : Iz = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i + \overline{z} \qquad (2.19)$$

де

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i (c_i')^2 + (d_i')^2\} \right)^{\frac{1}{2}} = a(1+\mu),$$

$\overline{z} \in E$ – фіксоване,

$$\overline{z} = \sum_{i=p+1}^{\infty} \begin{pmatrix} \overline{c_i} \\ \overline{d_i} \end{pmatrix} \psi_i.$$

Тобто імпульсне відображення I змінює перші p координат, збільшуючи в $1+\mu$ разів цільовий функціонал, та фіксує всі інші координати, починаючи з $p+1$.

Теорема 2.2. Імпульсно-збурена система (2.13), (2.17) – (2.19) *при достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *породжує імпульсну динамічну систему* $G : \mathbb{R}_+ \times E \to E$, *для якої існує рівномірний атрактор* Θ.

Доведення. Як відомо, імпульсна динамічна система у нормованому фазовому просторі E будується за допомогою неперервної напівтрупи $V : \mathbb{R}_+ \times E \to E$, імпульсної множини $M \subset E$ та імпульсного відображення $I : N \to E$. Рух вздовж імпульсної траєкторії, яку вважатимемо неперервною справа, відбувається по траєкторіях V до моменту часу τ, коли фазова точка $z(t)$ досягає множини M. В цей момент вона миттєво переводиться в нове положення $Iz(\tau)$. Для коректності побудови такої системи припускатимемо, що:

$$M \text{ - замкнена множина та } M \cap IM = \varnothing \tag{2.20}$$

$$\forall z \in M \quad \exists \tau = \tau(z) > 0 : \quad \forall t \in (0, \tau) \quad V(t, z) \notin M \tag{2.21}$$

$$\text{Кожна імпульсна траєкторія визначена на } [0, +\infty) \tag{2.22}$$

То ж перевіримо виконання умов (2.20) – (2.22). Умова (2.20) очевидно виконується. Доведемо справедливість умови (2.21). Для $u_i(t) = (u(t), \psi_i)$, де $u(\cdot)$ – розв'язок (2.13) маємо, що: $\forall i \geq 1$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\lambda_i u_i^2(t) + (u_i'(t))^2) + \beta(u_i'(t))^2 = -\varepsilon(f(u), \psi_i)u_i'(t). \tag{2.23}$$

Зокрема,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} l_p^2(z(t)) + \beta \sum_{i=1}^{p} (u_i'(t))^2 \leq \varepsilon c_1 \left(\sum_{i=1}^{p} (u_i'(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\forall t \geq 0 \quad l_p^2(z(t)) + \beta \int_0^t \sum_{i=1}^{p} (u_i'(s))^2 ds \leq l_p^2(z(0)) + \frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta} t. \tag{2.24}$$

Якщо $z(0) \in M$, то:

$$\sum_{i=1}^{p} (u_i'(0))^2 = a^2 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i^2(0) \geq a^2 - \gamma^2.$$

Тоді з неперервності $u_i'(t)$ випливає, що для деякого $\tau > 0$ справедливо, що $\forall t \in [0, \tau]$

$$\sum_{i=1}^{p} (u_i'(t))^2 \geq \frac{a^2 - \gamma^2}{2}.$$

Тоді з (2.24) для довільного $t \in [0, \tau]$ маємо:

$$l_p^2(z(t)) + \frac{\beta}{2}(a^2 - \gamma^2)t \leq a^2 + \frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta} t.$$

Таким чином, для достатньо малих $\varepsilon > 0$ для всіх $t \in (0, \tau)$: $l_p(z(t)) < a$, отже, отримуємо умову (2.21). Для перевірки умови (2.22) доведемо наступне

$$\exists \overline{s} > 0 \quad \forall z \in IM \quad s(z) \geq \overline{z}. \tag{2.25}$$

Відомо [150], що $u_i(t)$ задовольняє оцінку типу (2.14):

$$\forall t \geq 0 \quad (u_i'(t))^2 + \lambda_i u_i^2(t) \leq K_1((u_i'(0))^2 + \lambda_i u_i^2(0))e^{-\delta_1 t} + K_2 \varepsilon. \tag{2.26}$$

Тепер нехай $z_0 \in IM$, і $s(z_0)$ – момент першого потрапляння траєкторії (2.13) на M. Тоді з нерівності:

$$\forall t \geq 0 \quad l_p^2(z(t)) \leq K_1 l_p^2(z(0))e^{-\delta_1 t} + K_2 p \varepsilon$$

отримуємо:

$$\forall t \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{p} (u_i'(t))^2 \leq K_1 a^2 (1+\mu)^2 + K_2 p \varepsilon.$$

Використаємо (2.23) для $s = s(z_0)$. Маємо:

$$a^2(1+\mu)^2 - a^2 = 2\beta \int_0^s \sum_{i=1}^{p} (u_i'(t))^2 dt + +2\varepsilon \int_0^s \sum_{i=1}^{p} \left(f(u(t)), \psi_i\right) u_i'(t) dt \leq$$

$$\leq 2\beta(K_1 a^2(1+\mu)^2 + K_2 p\varepsilon)s + +\frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta} s + \beta(K_1 a^2 (1+\mu)^2 + K_2 p \varepsilon)s,$$

тобто:

$$s \geq \frac{a^2(1+\mu)^2 - a^2}{3\beta(K_1 a^2(1+\mu)^2 + K_2 p\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2 c_1^2}{\beta}} =: \overline{s} \tag{2.27}$$

Нерівність (2.27) означає, що виконується умова (2.22), тобто система (2.13), (2.17) – (2.19) породжує імпульсну динамічну систему $G : \mathbb{R}_+ \times E \to E$, для якої виконуються умови (2.20) – (2.22) та (2.15),(2.16), (2.25). Залишилось довести дисипативність імпульсної динамічної системи G. За відсутності імпульсних збурень з оцінки (2.14) виводимо, що для $||z(0)||_E \le r$ існує таке значення $T_1 = T_1(r)$, що для всіх $t \ge T_1$ $||z(t)||_E \le \sqrt{2}$. Якщо $z(s) \in M$, то з (2.26):

$$a^2 \le K_1 r^2 e^{-\delta_1 s} + K_2 \varepsilon p.$$

Звідси

$$s \le T_2 = T_2(r) = \frac{1}{\delta_1} ln \frac{(2K_1 r^2}{/a^2}.$$

Тоді $\forall t \in [0, T_2]$ $\quad ||z(t)||_E^2 \le K_1 r^2 + K_2$, і оскільки

$$||Iz||_E^2 \le a^2(1+\mu)^2 + ||\overline{z}||_E^2 =: R_0^2,$$

то для всіх $t \ge T_2$

$$||G(t, z_0)||_E^2 \le max\{R_0^2, K_1 R_0^2 + K_2\}$$

що й доводить дисипативність G . Теорему доведено.

2.4 Обмежені розв'язки стохастично-збурених систем типу реакція-дифузія

В цьому підрозділі розглянуто питання існування сильних розв'язків та асимптотичної поведінки нелокальної системи рівнянь типу реакції-дифузії, так званого бідоменного рівняння. Бідоменна модель була вперше запропонована Тунгом [153], і зараз є широко вживаною математичною моделлю електричної поведінки серцевої тканини. Вона складається з пари диференціальних рівнянь у частинних похідних типу реакції-дифузії, у поєднанні зі звичайним диференціальним рівнянням:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + f(u,w) + A_i u_i = I_i \text{ in } (0,+\infty)\times D, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + f(u,w) - A_e u_e = -I_e \text{ in } (0,+\infty)\times D, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + g(u,w) = 0, \text{ in } (0,+\infty)\times D, \\ \sigma_i \nabla u_i \cdot n = \sigma_e \nabla u_e \cdot n = 0, \text{ in } (0,+\infty)\times \partial D, \\ u(0) := u_i(0) - u_e(0) = u_0, w(0) = w_0 \text{ in } D. \end{cases} \tag{2.28}$$

Тут $D \subset \mathbb{R}^3$ є гладкою обмеженою множиною, що представляє міокард, $A_{i,e}u := -\nabla \cdot (\sigma_{i,e}\nabla u)$, $\sigma_{i,e}$ — рівномірно еліптичні матриці провідності, $f, g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функції, що представляють трансмембранні іонні струми, а $s_{i,e}$ — зовнішні джерела струму.

Існує ряд моделей для нелінійності f і g, які описують поширення імпульсів, наприклад *модель ФітцХ'ю — Нагумо* [64]

$$\begin{cases} f(u,w) = \eta[u(u-a)(u-1)+w], \\ g(u,w) = bw - cu. \end{cases} \tag{2.29}$$

модель Алієва-Панфілова [20]

$$\begin{cases} f(u,w) = \eta[ku(u-a)(u-1)+wu], \\ g(u,w) = ku(u-1-a)+w, \end{cases} \tag{2.30}$$

і *модель Роджерса-Маккалоха* [134]

$$\begin{cases} f(u,w) = \eta[bu(u-a)(u-1)+wu], \\ g(u,w) = -(cu-dw). \end{cases} \tag{2.31}$$

У цих моделях коефіцієнти задовольняють $0 < a < 1$ і $\eta, b, c, d, k, \varepsilon > 0$. Іншим важливим прикладом нелінійної взаємодії є *Allen-Cahn model*

$$\begin{cases} f(u) = \eta(u^3 - u), \\ g \equiv 0, \end{cases} \tag{2.32}$$

в якому система (2.28) роз'єднується. Система (2.28) може бути записана у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + f(u,w) + Au = I, \\ \frac{\partial y}{\partial t} + g(u,w) = 0, \\ u(0) = u_0, w(0) = w_0, \end{cases} \tag{2.33}$$

де $A := A_i(A_i + A_e)^{-1}A_e$ – це *бідоменний оператор* і $I := I_i - A_i(A_i + A_e)^{-1}(I_i + I_e)$ – це змінений вихідний термін. Основна складність, яка виникає при аналізі системи (2.33), полягає в тому, що оператор A нелокальний. Зокрема, він не задовольняє принципу максимуму, і теореми порівняння не застосовуються. Проте в [65] було показано, що цей оператор породжує аналітичну напівгрупу як в L^p, так і в L^∞. Показано, що рівняння (2.33) є локально коректно визначеним в сильному сенсі і глобально коректно визначеним в слабкому сенсі для описаних вище нелінійностей f і g. Недавній результат встановив існування сильних періодичних розв'язків.

В ході даних досліджень ми розглядаємо бідоменне рівняння з білим шумом:

$$\begin{cases} du = [-Au - f(u,w) + I]dt + dW, \ t \geq 0, \\ w_t = -g(u,w), \\ u(0) = u_0, w(0) = w_0, \end{cases} \tag{2.34}$$

де – нескінченновимірний процес Q-Вайнера, визначений нижче.

Тут $D \subset \mathbb{R}^3$ є гладкою обмеженою множиною, $H = L^2(D)$,

$$H_0 := \{v \in H, \int_D v dx = 0\}, \tag{2.35}$$

та $V = H^1(D) = W_2^1(D)$. Спарювання (u, v) визначає скалярний добуток в H, та $\langle u, v \rangle$ визначає скалярний добуток в V.

Припускаємо виконання властивості рівномірної еліптичності для провідностей σ_i і σ_e, тобто існують такі $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$, що для всіх $x \in D$ і $\xi \in \mathbb{R}^3$ виконується

$$\sigma_1 |\xi|^2 \leq \langle \sigma_{i,e} \xi, \xi \rangle \leq \sigma_2 |\xi|^2 \tag{2.36}$$

Коректно визначений бідоменний оператор A

$$D(A) := \{u \in H^2(D) \cap H_0, \nabla u \cdot \nu = 0 \text{ on } \partial D\}. \tag{2.37}$$

Крім того, можна визначити білінійну форму $a(u, v)$ для всіх $u, v \in V := H^1(D)$, таку, що

$$a(u, v) = (Au, v)$$

якщо u та v існують в $D(A)$. Ця білінійна форма неявно визначає бідоменний оператор в слабкому сенсі. Крім того, за припущенням (2.36) білінійна форма a є симетричною, неперервною та коерцитивною на V, тобто існують такі сталі $\alpha > 0$ і $M > 0$, що

$$\forall u \in V, \ \alpha \|u\|_V \leq a(u, u) + \alpha \|u\|_H^2 \tag{2.38}$$

та

$$\forall u, v \in V, \ |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V. \tag{2.39}$$

Крім того, існує $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_i \leq ...$ в $\mathbb{R}$ і ортонормований (у H) базис $\{\psi_i, i \geq 1\} \in V$, такий що

$$\forall v \in V, a(\psi_i, v) = \lambda_i (\psi_i, v).$$

Тепер ми можемо визначити шум як

$$W(t, x) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\gamma_i} \psi_i(x) W_i(t),$$

де W_i незалежний стандартний вінерівський процес, та

$$\gamma := \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i < \infty. \tag{2.40}$$

Далі опишемо клас нелінійностей f і g. Ми вважаємо, що нелінійності $f(u,w)$ і $g(u,w)$ мають вигляд

$$f(u,w) = f_1(u) + f_2(u)w, \;\; g(u,w) = g_1(u) + g_2 w. \tag{2.41}$$

Тут $g_2 \in \mathbb{R}$, а f_1, f_2 і g_1 є неперервними дійсними функціями, які задовольняють наступні умови:

- [C1] існують сталі $c_i \geq 0$ $(i = 1...6)$ такі, що для будь-якого $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f_1(u)| &\leq c_1 + c_2|u|^3; \\ |f_2(u)| &\leq c_3 + c_4|u|; \\ |g_1(u)| &\leq c_5 + c_6|u|^2. \end{aligned} \tag{2.42}$$

- [C2] $f_1(u)$, $f_2(u)$ та $g_1(u)$ є локально ліпшицевими по u;

- [C3] існують такі сталі a, b і $c \geq 0$, що для будь-якого $(u,w) \in \mathbb{R}^2$ маємо

$$uf(u,w) + wg(u,w) \geq au^4 - b(u^2 + w^2) - c. \tag{2.43}$$

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — повний ймовірнісний простір, і $\mathcal{F}_t$ — неперервна справа фільтрація така, що $W(t,x)$ адаптовано до $\mathcal{F}_t$, а $W(t) - W(s)$ не залежить від $\mathcal{F}_s$ для всіх $s < t$.

Означення 2.3. $\mathcal{F}_t$-адаптований випадковий процес $(u(t,\cdot), w(t,\cdot)) \in V \times H$ називається слабким розв'язком (2.34), якщо для м.в. $t > 0$, для кожного $v \in V$ і $y \in H$ маємо

$$(u(t),v) = (u(0),v) - \int_0^t [a(u(\tau),v) + (f(u(\tau),w(\tau)),v) - (I(\tau),v)]d\tau + (v,W(t)) \tag{2.44}$$

та

$$(w(t), y) = (w(0), y) - \int_0^t (g(u(\tau), w(\tau)), y)\, d\tau. \tag{2.45}$$

Означення 2.4. $\mathcal{F}_t$-адаптований випадковий процес $(u(t,\cdot), w(t,\cdot)) \in D(A)\times H$ називається сильним розв'язком (2.34), якщо для a.e. $t > 0$

$$u(t) = u(0) - \int_0^t [Au(\tau) + f(u(\tau), w(\tau)) - I(\tau)] d\tau + W(t), \tag{2.46}$$

і

$$w(t) = w(0) - \int_0^t g(u(\tau), w(\tau))\, d\tau. \tag{2.47}$$

Нехай $S(t)$ — напівгрупа, породжена оператором $-A$, тобто

$$S(t)u_0(x) := u(t, x),$$

де $u(t, x)$ є розв'язком

$$\begin{cases} u_t = -Au, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

З [65] випливає, що $S(t)$ є аналітичною напівгрупою в $L^p(D)$ для $p > 1$. Зауважимо, що за означенням λ_k і ψ_k ми маємо

$$S(t)\psi_k = e^{-\lambda_k t}\psi_k \text{ for } k \geq 1. \tag{2.48}$$

Напівгрупа $S(t)$ дозволяє визначити стохастичну згортку

$$W_A(t, x) := \int_0^t S(t-\tau) dW(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \int_0^t S(t-\tau)\psi_i(x) dW_i(t).$$

В силу вкладення для просторів Соболєва, $V = H^1(D) \subset L^p(D)$ в $\mathbb{R}^3$ якщо $2 \leq p \leq 6$.

Лема 2.4. Припустимо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda_k^{1/2} < \infty. \tag{2.49}$$

Тоді для $T \geq 0$ та для майже усіх $\omega \in \Omega$ маємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \|W_A\|^p_{L^p(D)} \leq C(T,\omega) < \infty. \tag{2.50}$$

а для усіх $t \in [0,T]$ та майже усіх $\omega \in \Omega$ маємо $W_A(t,\cdot) \in D(A)$.

З леми 2.4 виплаває $W_A(t,x) \in D(A)$ за умови виконання (2.49). Таким чином $W_A(t) = \int_0^t AW_A(s)ds + W(t)$. Зробимо заміну змінних $U = u - W_A(t)$. Таким чином, пара (U, y) є розв'язком

$$\begin{cases} dU = (-AU - f(U + W_A(t), y) + I(t))dt; \\ dw = -g(U + W_A(t), w)dt. \end{cases} \tag{2.51}$$

Якщо (U, w) є сильним розв'язком (2.51), то $U \in D(A)$, з чого, у свою чергу, випливає, що $u = U + W_A \in D(A))$, отже, (u, w) є сильним розв'язком (2.34). Оскільки $S_A(t)$ є аналітичною напівгрупою, для $\alpha \in (0, 1/2)$ процес $W_A(\cdot)$ має α-Гельдер неперервні траєкторії в $H = L^2(D)$. Позначимо

$$Z := H \times B,\ B = L^\infty(D)$$

і $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset Z \to Z$, $\mathcal{A}z = (-Au, 0)$ для $z = (u, w) \in Z$. Тут $D(\mathcal{A}) = D(A) \times B$, де

$$D(A) = \{u \in H : \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2 (u, \Psi_i)^2 < \infty\}.$$

Далі, визначимо

$$Z^\alpha = \{u \in H, \sum_{i\geq 0} \lambda_i^{2\alpha} (u, \Psi_i)^2 < \infty\} \times B$$

та

$$\mathcal{A}^\alpha(u, y) := \left(\sum_{i\geq 0} \lambda_i^\alpha (u, \Psi_i)\Psi_i, 0 \right).$$

Далі для $0 \leq \alpha \leq \beta$ маємо вкладення $Z^\beta \subset Z^\alpha$, та якщо $\beta = 1$, тоді $D(\mathcal{A}) \subset Z^\beta \subset Z^\alpha$. Отже,

$$W_A \in D((-A)^\alpha). \tag{2.52}$$

Якщо $\frac{d}{4} < \alpha < 1$, тоді $Z^\alpha \subset B \times B$. Далі, маємо

$$\mathcal{F}(z) := (u, w) \to (f(u, w), g(u, w))$$

є локально Ліпшицевим відображенням із Z^α в Z, за умови, що f і g є локально Ліпшицевими функціями.

Теорема 2.3. Припустимо, що $\{\gamma_k, k \geq 1\}$ *задовольняють* (2.49). *Тоді для будь-яких початкових умов* $(u_0, w_0) \in Z^\alpha$ *існує* $T = T(\omega) > 0$ *таке, що існує* $(u(t, x, \omega), w(t, x, \omega))$, *який є сильним розв'язком* (2.34) *на інтервалі* $[0, T(\omega))$ *у сенсі означення 2.4.*

Далі ми будемо використовувати теорію регулярності для критичних просторів (результати типу Серріна) для параболічних напівлінійних рівнянь. Нам знадобиться наступне позначення:

- Для $\beta \in [0, 1]$ інтерполяційний простір $X_\beta = (X_0, X_1)_\beta := D(A^\beta) \times H$, де $X_0 = H \times H$ та $X_1 = D(A) \times H$.

- Вагові за часом простори: якщо Y є банаховим простором, $p > 1$, $a \geq 0$ і $1 \geq \mu > 1/p$, то

$$u \in L^{p,\mu}((0, a), Y) \text{ if } t^{1-\mu} u \in L^p((0, a), Y)$$

та

$$u \in W^1_{p,\mu}((0, a), Y) \text{ if } t^{1-\mu} u \in W^{1,p}((0, a), Y).$$

- Для $p \geq 2$ визначимо простір $X_\mu := W_2^{2/p}(D) \times H$, і $E_\mu(a) := L^\infty((0, a), H) \cap L^2((0, a), V) \times L^p((0, a)), H)$. Із нерівності Соболєва випливає, що $E_\mu(a) \subset L^p([0, a], X_\mu)$, якщо $D \subset \mathbb{R}^2$.

Нехай A — секторальний оператор $A : X_1 \to X_0$, а $F : X_\beta \to X_0$, де $\beta \in (0, 1)$

вибрано так, що $X_\beta \subset V \times H$. Розглянемо таке еволюційне рівняння:

$$\begin{cases} v_t + Av = F(v + \varphi(t,x)), \\ v(0) = v_0 \in X_\beta. \end{cases} \tag{2.53}$$

Припустимо

[i] Для кожного $a \geq 0$, $\varphi \in L^{2p,\mu}([0,a), X_\beta)$.

[ii] Існує $C > 0$ таке, що

$$\|F(\cdot)\|_{X_0} \leq C(1 + \|\cdot\|^3_{X_\beta}). \tag{2.54}$$

Тоді справедлива така теорема:

Теорема 2.4. Припустимо, що виконуються умови [i] та [ii], і розв'язок (2.53) *визначено на максимальному інтервалі існування* $[0,T)$. *Тоді* $u \in L^p((0,a), X_\mu)$ *для кожного* $0 \leq a < T$, *та якщо* $T < \infty$, *тоді* $u \notin L^p([0,T), X_\mu)$.

Доведення. Для

$$\mu - \frac{1}{p} > 2\beta - 1, \tag{2.55}$$

нехай

$$\alpha := \frac{\beta - (\mu - 1/p)}{1 - (\mu - 1/p)}.$$

Припустимо $T < \infty$. Використовуючи умову [ii], для будь-якого $a < T$, маємо

$$\|F(v+\varphi)\|_{L^{p,\mu}((0,a),X_\beta)} \leq C_1(1 + \|v+\varphi\|^3_{L^{2p,\tau}((0,a),X_\beta)}) \leq 4C_1\|v\|^3_{L^{2p,\tau}((0,a),X_\beta)} + C_2, \tag{2.56}$$

де

$$C_2 := C_1 + 4C_1\|\varphi\|^3_{L^{2p,\tau}((0,T),X_\beta)} < \infty.$$

Далі, із інтерполяційної нерівності маємо

$$\|v\|^3_{L^{2p,\tau}((0,a),X_\beta)} \leq C_3\|v\|^{3(1-\alpha)}_{L^p((0,a),X_\mu)}\|v\|^{3\alpha}_{E_\mu(0,a)}. \tag{2.57}$$

Нарешті, нехай M — стала максимальної регулярності для інтервалу $[0, T)$. Об'єднавши (2.56) і (2.57), ми маємо

$$\|v\|_{E_\mu(0,a)} \leq M(\|v(0)\|_{X_\mu} + C_2 + C_4\|v\|^{3(1-\alpha)}_{L^p((0,a),X_\mu)}\|v\|^{3\alpha}_{E_\mu(0,a)}).$$

Для субкритичного вибору параметрів μ, β і p, заданих (2.55), таких, що $3\alpha \leq 1$, маємо $\|v\|_{E_\mu(0,a)}$ обмежена рівномірно в a для всіх $a < T$. Це означає, що розв'язок можна продовжити поза T, що суперечить тому факту, що $[0, T]$ є інтервалом максимального існування. $\square$

Теорема 2.5. Припустимо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \lambda_k^2 < \infty,$$

та рівність (2.34) *розглядається у випадку розмірності 2. Тоді для будь-яких початкових умов* $(u_0, w_0) \in X_\beta$ *існує сильний розв'язок* $(u(t, x, \omega), w(t, x, \omega))$ *з* (2.34) *у сенсі означення 2.4, яке визначено для всіх* $t \geq 0$.

2.5 Інваріантні міри та збіжність до стаціонарних станів у випадку малих збурень

Якісну поведінку розв'язків стохастичних еволюційних рівнянь у гільбертовому просторі H часто розглядають в термінах встановлення існування та, в деяких випадках, єдиності інваріантних мір, що, у свою чергу, є вирішальним елементом у встановленні ергодичної поведінки базових фізичних систем. Для зручності коротко нагадаємо поняття інваріантної міри. Припустимо, $v_0 \in H$, а B є борелівською підмножиною H. Для $t \geq 0$ визначте напівгрупу ймовірності переходу

$$P_t(v_0, B) := \mathbb{P}(v(t, v_0) \in B).$$

Крім того, для будь-якої вимірної за Борелем обмеженої функції $\varphi \in M_b(H)$ визначимо напівгрупу Маркова

$$P_t\varphi(v_0) = E\varphi(v(t, v_0) = \int_H \varphi(v)P_t(v_0, dv).$$

Означення 2.5. Нехай множина $Pr(H)$ — множина ймовірнісних мір на H. Елемент $\mu \in Pr(H)$ називається інваріантною мірою для марківської напівгрупи P_t, якщо

$$\int_H \varphi(v_0)d\mu(v_0) = \int_H P_t\varphi(v_0)d\mu(v_0).$$

Класичний підхід базується на результатах Крилова та Боголюбова. Ключові моменти цього підходу включають властивість Феллера і стохастичну неперервність марківської напівгрупи P_t, а також існування принаймні одного розв'язку, який є глобально обмеженим у певному ймовірнісному сенсі. Існування інваріантних мір для бідоменного рівняння (2.34) з використанням вищезгаданої процедури встановлено в [126]. Зокрема, показано, що рівняння (2.34) має стаціонарний розв'язок, що, у свою чергу, передбачає існування інваріантної міри, визначеної на функціональному просторі $(u, w) \in H \times H$. Достатні умови єдиності цієї інваріантної міри також виведені в [127].

Ми довели, що інваріантна міра, встановлена в [126], теорема 5.1, підтримується на функціональному класі (u, w) з u, що має регулярність принаймні V. Нагадаємо, що для $v = (u, w)$ позначимо

$$\|v\|^2_{\tilde{V}} := \|u\|^2_V + \|w\|^2_H$$

та

$$\|v\|^2_{\tilde{H}} := \|u\|^2_H + \|w\|^2_H.$$

Теорема 2.6. Припустимо, що виконуються умови теореми 5.1 [126]. Нехай $\mu \in Pr(\tilde{H})$ *є інваріантною мірою для* (2.34). *Тоді*

$$\int_{\tilde{H}} \|v\|^2_{\tilde{V}} d\mu(v) < \infty.$$

У деяких фізичних задачах природно припустити, що випадкові збурення малі порівняно з детермінованим компонентом динаміки. У цьому підрозділі ми розглядаємо такі збурення для бідоменного рівняння, що призводить до наступного рівняння, збуреного малим параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} du_\varepsilon = [-Au_\varepsilon - f(u_\varepsilon, w_\varepsilon) + I]dt + \varepsilon dW, \ t \geq 0, \\ dw_\varepsilon = -g(u_\varepsilon, w_\varepsilon)dt, \\ u_\varepsilon(0) = u_0, w_\varepsilon(0) = w_0. \end{cases} \tag{2.58}$$

Поряд з (2.58) ми розглядаємо граничне (незбурене) рівняння

$$\begin{cases} du = [-Au - f(u, w) + I]dt, \ t \geq 0, \\ dw = -g(u, w)dt, \\ u(0) = u_0, w(0) = w_0. \end{cases} \tag{2.59}$$

Нехай $y := (u, w)^T \in \mathbb{R}^2$. Визначимо $\mathcal{F}$ наступним чином

$$\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(u, w) := \begin{pmatrix} -f(u, w) + I \\ -g(u, w) \end{pmatrix}.$$

Ми припускаємо, що існують такі сталі $c_1 \in \mathbb{R}$ і $c_2 \in \mathbb{R}$, що для всіх $(u_1, w_1), (u_2, w_2) \in \mathbb{R}^2$ функція $\mathcal{F}$ задовольняє *умову монотонності*

$$(\mathcal{F}(u_1, w_1) - \mathcal{F}(u_2, w_2)) \cdot ((u_1, w_1) - (u_2, w_2)) \leq -c_1(u_1 - u_2)^2 - c_2(w_1 - w_2)^2. \tag{2.60}$$

Теорема 2.7. Припустимо, що f і g задовольняють умови [C1]-[C3] та умову монотонності (2.60). *Тоді існує $C = C(T)$ таке, що*

$$E \sup_{t \in [0,T]} (\|u_\varepsilon(t) - u(t)\|^2 + \|w_\varepsilon(t) - w(t)\|^2) \leq \varepsilon C(T).$$

Доведення. Введемо $v_\varepsilon := u_\varepsilon - u$ та $z_\varepsilon := w_\varepsilon - w$. Тоді пара $(v_\varepsilon, z_\varepsilon)$ є розв'язком

$$\begin{cases} dv_\varepsilon = [-Au_\varepsilon - (f(u_\varepsilon, w_\varepsilon) - f(u,w))]dt + \varepsilon dW, \ t \geq 0, \\ dz_\varepsilon = -(g(u_\varepsilon, w_\varepsilon) - g(u,w))dt, \\ v_\varepsilon(0) = 0, z_\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{2.61}$$

Використовуючи формулу Іто, маємо

$$\|v_\varepsilon(t)\|^2 = 2\int_0^t \langle -Av_\varepsilon, v_\varepsilon\rangle ds - 2\int_0^t (f(u_\varepsilon, w_\varepsilon) -$$

$$f(u,w), u_\varepsilon - u)ds + \varepsilon^2\gamma t + 2\varepsilon\int_0^t (v_\varepsilon, dW_s)$$

так само, як

$$\|z_\varepsilon\|^2 = -2\int_0^t (g(u_\varepsilon, w_\varepsilon) - g(u,w), w_\varepsilon - w)ds.$$

Загалом, використовуючи умову монотонності (2.60), одержуємо

$$\|v_\varepsilon(t)\|^2 + \|z_\varepsilon(t)\|^2 \ \leq \ 2\int_0^t (-\alpha\|v_\varepsilon\|_V^2 + \alpha\|v_\varepsilon\|^2)ds + C_1\int_0^t (\|v_\varepsilon\|^2 + \|z_\varepsilon\|^2)ds +$$

$$\varepsilon^2\gamma t + 2\varepsilon\int_0^t (v_\varepsilon, dW_s).$$

Отже,

$$E\sup_{t\in[0,T]} (\|v_\varepsilon(t)\|^2 + \|z_\varepsilon(t)\|^2) \leq$$

$$\leq \quad \sigma\int_0^T (\|v_\varepsilon\|^2 \ + \ \|z_\varepsilon\|^2)ds \ + \ \varepsilon^2\gamma T \ + \ 2\varepsilon E\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t (v_\varepsilon, dW_s)\right|,$$

для деякого $\sigma > 0$. Тут

$$\int_0^t (v_\varepsilon, dW_s) = \int_0^t (v_\varepsilon, \sum_j \gamma_i\Psi_i(x)dW_i(s))$$

є мартингалом, який далі можна оцінити наступним чином:

$$E\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t(v_\varepsilon,dW_s)\right|\le\sqrt{E\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t(v_\varepsilon,dW_s)\right|^2} \tag{2.62}$$

$$=\sqrt{E\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\left(v_\varepsilon,\sum_i\gamma_i\Psi_i dW_i(s)\right)\right|^2}=\sqrt{E\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_i\gamma_i^2\int_0^t(v_\varepsilon,\Psi_i)dW_i(s)\right|^2}$$

$$\le C\sqrt{\sum_i\gamma_i^2\int_0^T E(v_\varepsilon,\Psi_i)^2ds}\le C\sqrt{\int_0^T E\|v_\varepsilon(s)\|^2ds}\le C+C\int_0^T E\|v_\varepsilon(s)\|^2ds,$$

де ми використали елементарну нерівність $\sqrt{a}\le a+1$. Таким чином, для деяких $\sigma_1>0$, маємо

$$E\sup_{t\in[0,T]}(\|v_\varepsilon(t)\|^2+\|z_\varepsilon(t)\|^2)\le\sigma_1\int_0^T\sup_{s\in[0,t]}(\|v_\varepsilon(s)\|^2+\|z_\varepsilon(s)\|^2)dt+\varepsilon^2\gamma T+2\varepsilon C.$$

З нерівності Гронуолла випливає, що

$$E\sup_{t\in[0,T]}(\|u_\varepsilon(t)-u(t)\|^2+\|w_\varepsilon(t)-w(t)\|^2)\le C(T)\varepsilon.$$

□

Особливий інтерес викликає вплив малих випадкових збурень на великих інтервалах часу. Взагалі кажучи, у цьому випадку невеликі збурення мають значний вплив на макроскопічну поведінку основної фізичної системи. Щоб вивчити цей вплив, ми повинні оцінити ймовірності малоймовірних подій. Іншими словами, нам необхідно вивчити асимптотичну поведінку великих відхилень для випадкових процесів.

Нехай C_p – стала із в нерівності Пуанкаре, тобто

$$\|u\|_H^2\le C_p\|\nabla u\|_H^2,\quad u\in V\cap H_0. \tag{2.63}$$

з H_0, визначеним у (2.35).

Теорема 2.8. Нехай виконуються умови [C1], [C2, [C3] та умова монотонності (2.60). *Припустимо, крім того, що сталі* c_1 *і* c_2, *що з'являються в* (2.60), *задовольняють* $c_2 \geq 0$ *і*

$$c_1 \geq -\frac{\alpha}{C_p} \tag{2.64}$$

з α *і* C_p, *заданими* (2.63). *Тоді*

$$P\{\sup_{0\leq t\leq T}\{\|u_\varepsilon(t)-u(t)\|^2+\|w_\varepsilon(t)-w(t)\|^2\} \geq r^2\} \leq 3\exp\left[-\frac{r^2}{4\gamma\varepsilon^2 T}\right], \tag{2.65}$$

з γ *отриманого в* (2.40).

Доведення. Спершу зауважимо, що використовуючи (2.60), (2.63) та (2.64):

$$\langle -Av_\varepsilon, v_\varepsilon\rangle - (f(u_\varepsilon,w_\varepsilon)-f(u,w),u_\varepsilon-u)-(g(u_\varepsilon,w_\varepsilon)-g(u,w),w_\varepsilon-w) \tag{2.66}$$
$$\leq -\alpha\|v_\varepsilon\|_V^2+\alpha\|v_\varepsilon\|_H^2-c_1\|v_\varepsilon\|_H^2-c_2\|z_\varepsilon\|_H^2 = -\alpha\|\nabla v_\varepsilon\|_H^2-c_1\|v_\varepsilon\|_H^2-c_2\|z_\varepsilon\|_H^2 \leq$$
$$-\frac{\alpha}{C_p}\|v_\varepsilon\|_H^2-c_1\|v_\varepsilon\|_H^2-c_2\|z_\varepsilon\|_H^2 \leq 0.$$

Розглянемо функціонал

$$\Phi_\lambda(v,z)=(1+\lambda(\|v\|^2+\|z^2\|^2)^{1/2},\ v,z\in H.$$

Використовуючи формулу Іто, маємо

$$\Phi_\lambda(v_\varepsilon,z_\varepsilon)=1+\lambda\int_0^t \Phi_\lambda^{-1}(v_\varepsilon,z_\varepsilon)[\langle -Av_\varepsilon,v_\varepsilon\rangle \tag{2.67}$$
$$-(f(u_\varepsilon,w_\varepsilon)-f(u,w),u_\varepsilon-u)-(g(u_\varepsilon,w_\varepsilon)-g(u,w),w_\varepsilon-w)]ds+$$
$$+\lambda\varepsilon\int_0^t \Phi_\lambda^{-1}(v_\varepsilon,y_\varepsilon)(v_\varepsilon,dW_s)+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^t\left\{\lambda\Phi_\lambda^{-1}(v_\varepsilon,z_\varepsilon)\gamma-\lambda^2\Phi_\lambda^{-3}(v_\varepsilon,z_\varepsilon)(Qv_\varepsilon,v_\varepsilon)\right\}ds.$$

Тут Q - це коваріаційний оператор сліду, такий, що $Qe_k=\lambda_k e_k$, Q наведено у означенні W_t. З (2.67) та (2.66) випливає, що

$$\Phi_\lambda(v_\varepsilon,z_\varepsilon)\leq 1+\eta_t^\lambda+$$
$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^t\left[\lambda\Phi_\lambda^{-1}(v_\varepsilon,z_\varepsilon)\gamma+\lambda^2(Qv_\varepsilon,v_\varepsilon)(\Phi_\lambda^{-2}(v_\varepsilon,z_\varepsilon)-\Phi_\lambda^{-3}(v_\varepsilon,z_\varepsilon))\right]ds, \tag{2.68}$$

де $\gamma = Tr(Q)$ та

$$\eta_t^\lambda = \lambda\varepsilon \int_0^t \Phi_\lambda^{-1}(v_\varepsilon, z_\varepsilon)(v_\varepsilon, dW_s) - \frac{1}{2}\lambda^2\varepsilon^2 \int_0^t \Phi_\lambda^{-2}(v_\varepsilon, z_\varepsilon)(Qv_\varepsilon, v_\varepsilon)ds. \tag{2.69}$$

Зауважимо, що $\forall\lambda > 0\ \forall\alpha > 0$, з $0 < \Phi_\lambda^{-\alpha} \leq 1$, маємо

$$\Phi_\lambda^{-2}(v, z)[1 - \Phi_\lambda^{-1}(v, z)] \leq 1$$

та

$$(Qv, v) \leq \gamma\|v\|^2.$$

Тому,

$$\Phi_\lambda^{-2}(v, z)(Qv, v) \leq \frac{\gamma}{\lambda}\frac{\|v\|^2}{\frac{1}{\lambda} + \|v\|^2 + \|z\|^2},$$

що для $t \leq T$ випливає

$$\Phi_\lambda(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq 1 + \varepsilon^2\lambda T\gamma + \eta_t^\lambda. \tag{2.70}$$

Тому,

$$P\{\sup_{0\leq t\leq T}\{\|u_\varepsilon - u\|^2 + \|w_\varepsilon - w\|^2\} \geq r^2\} = P\{\sup_{t\in[0,T]} \Phi_\lambda(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \geq (1 + \lambda r^2)^{\frac{1}{2}}\} \leq \tag{2.71}$$

$$P\{1 + \varepsilon^2\lambda T\gamma + \sup_{t\in[0,T]} \eta_t^\lambda \geq (1 + \lambda r^2)^{\frac{1}{2}}\} = P\{e^{\sup_{t\in[0,T]}\eta_t^\lambda} \geq e^{(1+\lambda r^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^2\lambda T\gamma - 1}\}.$$

З формули Іто випливає, що $e^{\eta_t^\lambda}$ є мартингалом, який, крім того, задовольняє

$$Ee^{\eta_t^\lambda} = Ee^{\eta_0^\lambda} = 1.$$

Тепер, використовуючи нерівність Чебишева, нерівність мартингала Дуба та той факт, що $\sup_t e^{a(t)} = e^{\sup_t a(t)}$, отримуємо

$$P\{\sup_{0\leq t\leq T}\{\|u_\varepsilon(t) - u(t)\|^2 + \|w_\varepsilon(t) - w(t)\|^2\} \geq r^2\} \leq e^{1+(1+\varepsilon^2\lambda T\gamma - \lambda r^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.72}$$

Залишилося оптимізувати останній вираз по λ. Поклавши

$$\lambda := \left(\frac{r}{2\gamma\varepsilon^2 T}\right)^2 - \frac{1}{r^2},$$

показник можна оцінити як

$$1 + (1 + \varepsilon^2 \lambda T \gamma - \lambda r^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1 - \frac{r^2}{4\varepsilon^2 \gamma T},$$

дає потрібний результат

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} \{\|u_\varepsilon(t) - u(t)\|^2 + \|w_\varepsilon(t) - w(t)\|^2\} \geq r^2\} \leq 3e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon^2 \gamma T}}.$$

□

Тепер розглянемо питання збіжності до стаціонарних розв'язків для збуреної задачі

$$\begin{cases} du_\varepsilon = [-Au_\varepsilon - f(u_\varepsilon, w_\varepsilon) + I(x)]dt + \varepsilon dW, \ t \geq 0, \\ dw_\varepsilon = -g(u_\varepsilon, w_\varepsilon)dt. \end{cases} \tag{2.73}$$

Припустимо, що виконуються умови теореми 5.2 [126]. Тоді для будь-якого $\varepsilon \geq 0$ рівняння (2.73) має єдиний стаціонарний розв'язок $z^*_\varepsilon := (u^*_\varepsilon, w^*_\varepsilon)$.

Зауваження 2.7. Зауважимо, що z_ε може мати різні початкові умови для кожного ε.

Теорема 2.9. За умовами теореми 5.2 [126] маємо

$$\sup_{t \in [0,T]} E\|z^*_\varepsilon(t) - z^*_0(t)\| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Ми розширюємо процес Вінера W для від'ємного t на

$$\overline{W}(t) = \begin{cases} W(t), \ \text{for } t \geq 0, \\ V(-t), \ \text{if } t \leq 0, \end{cases} \tag{2.74}$$

і покладаємо $\overline{\mathcal{F}(t)} = \sigma\big(\overline{W}(s), s \leq t\big)$ для $t \in \mathbb{R}$, де $V(t), t \geq 0$ – це ще один процес Вінера, незалежний від $W(t)$. Для простоти наших позначень ми позначимо процес $\overline{W(t)}$ через $W(t)$. Для $n \geq 1$ позначимо $z_\varepsilon(t, -n, z_0)$ як розв'язок

(2.73) з початковою умовою $z_\varepsilon(-n) = z_0 = (u_0, w_0) \in H \times H$. Використовуючи енергетичну оцінку з теореми 5.2 [126], маємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E\|z_\varepsilon(t)\|^2 \le \frac{1}{2}\varepsilon^2\gamma - \mu E\|z_\varepsilon(t)\|^2 + K_2, \tag{2.75}$$

з якої, за нерівністю Гронуолла, випливає рівномірна обмеженість за $\varepsilon \in [0,1]$

$$E\|z_\varepsilon\|^2 \le K_3(1 + \|z(0)\|_H^2).$$

Крім того, для $\varepsilon_1 \ge 0$ і $\varepsilon_2 \ge 0$,

$$\begin{cases} d(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) = [-A(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) - [f(u_{\varepsilon_1}, w_{\varepsilon_1}) - f(u_{\varepsilon_2}, w_{\varepsilon_2})]dt + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)dW, \\ d(w_{\varepsilon_1} - w_{\varepsilon_2}) = -(g(u_{\varepsilon_1}, w_{\varepsilon_1}) - g(u_{\varepsilon_2}, w_{\varepsilon_2}))dt. \end{cases} \tag{2.76}$$

Використовуючи ті ж міркування, що й у (2.75), маємо

$$\frac{d}{dt}\left(E\|z_{\varepsilon_1} - z_{\varepsilon_2}\|^2\right) \le -\mu E\|z_{\varepsilon_1} - z_{\varepsilon_2}\|^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2\gamma,$$

тому

$$\begin{aligned} E(\|u_{\varepsilon_1}(0,-n,u_0) - u_{\varepsilon_2}(0,-n,u_0)\|^2 + \|w_{\varepsilon_1}(0,-n,u_0) - w_{\varepsilon_2}(0,-n,u_0)\|^2) \\ \le (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2\gamma. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Крім того, як було показано в доведенні теореми 5.2 [126], маємо

$$E\|u_{\varepsilon_1}(0,-n,u_0) - u_{\varepsilon_2}(0,-n,u_0)\|^2 \to E\|u^*_{\varepsilon_1}(0) - u^*_{\varepsilon_2}(0)\|^2,\ n \to \infty$$

та

$$E\|w_{\varepsilon_1}(0,-n,u_0) - w_{\varepsilon_2}(0,-n,u_0)\|^2 \to E\|w^*_{\varepsilon_1}(0) - w^*_{\varepsilon_2}(0)\|^2,\ n \to \infty.$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$ в (2.77), отримуємо

$$E(\|u^*_{\varepsilon_1}(0) - u^*_{\varepsilon_2}(0)\|^2 + \|w^*_{\varepsilon_1}(0) - w^*_{\varepsilon_2}(0)\|^2) \le (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2\gamma.$$

Наведена вище обмеженість означає, що послідовність $\{(u^*_\varepsilon(0), w^*_\varepsilon(0)\}$ є послідовністю Коші, а отже

$$\{(u^*_\varepsilon(0), w^*_\varepsilon(0)\} \to \{(u^*_0(0), w^*_0(0)\}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Тепер можемо встановити, що

$$E \sup_{t\in[0,T]} \|z^*_\varepsilon(t) - z^*_0(t)\| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Для цього покладемо $v_\varepsilon = u^*_\varepsilon - u^*_0$ і $y_\varepsilon = w^*_\varepsilon - w^*_0$. Тоді

$$\begin{aligned}&\|v_\varepsilon(t)\|^2 + \|y_\varepsilon(t)\|^2 = \|u^*_\varepsilon(0) - u^*_0(0)\|^2 + \|w^*_\varepsilon(0) - w^*_0(0)\|^2 + \\ &2\int_0^t [\langle -Av_\varepsilon, v_\varepsilon\rangle - (f(u^*_\varepsilon, w^*_\varepsilon) - f(u^*_0, w^*_0), u^*_\varepsilon - u^*_0) - \\ &-(g(u^*_\varepsilon, w^*_\varepsilon) - g(u^*_0, w^*_0), w^*_\varepsilon - w^*_0)]ds + \varepsilon^2\gamma t + 2\varepsilon\int_0^t (v^*_\varepsilon, dW_s).\end{aligned}$$

Тепер ми можемо перейти до оцінки стохастики аналогічно (2.62), а потім використати нерівність Гронуолла так само, як у (2.75), щоб зробити висновок, що

$$\begin{aligned}&E \sup_{t\in[0,T]} (\|u^*_\varepsilon(t) - u^*_0(t)\|^2 + \|w^*_\varepsilon(t) - w^*_0(t)\|^2) \\ &\qquad \le E(\|u^*_\varepsilon(0) - u^*_0(0)\|^2 + \|w^*_\varepsilon(0) - w^*_0(0)\|^2) + C_1(T)\varepsilon \to 0,\ \varepsilon \to 0,\end{aligned}$$

що завершує доведення. $\square$

РОЗДІЛ 3 РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ АТРАКТОРІВ ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ

3.1 Загальний підхід до робастної стійкості атракторів

Розглянемо нескінченновимірну систему

$$\frac{d}{dt}y = Ay + \Phi(y), \tag{3.1}$$

де $y \in X$, $(X, \|\cdot\|_X)$ – банахів простір, A породжує неперервну напівгрупу на X і $\Phi : X \to X$ є Ліпшиц-неперервною. Припустимо, що ця система має глобальний атрактор Θ в X. Ця властивість гарантує, що довільний розв'язок (3.1) притягується до Θ, коли $t \to \infty$. Ми хочемо в певному сенсі зберегти цю властивість у випадку, коли система (3.1) є збуреною зовнішнім збуренням, що в практичних ситуаціях може входити до системи як розподілений параметр в правій частині рівнгяння, або через границю області. Отже, розглядаємо збурену систему у формі

$$\frac{d}{dt}y = Ay + \Phi(y) + hu, \;\; u \in U \subseteq L^\infty(\mathbb{R}_+). \tag{3.2}$$

За заданого початкового стану $y_0 := y(0) \in X$ і збуреного сигналу $u \in U$ відповідний єдиний розв'язок (3.2) позначається через $y(t, y_0, u)$. В силу збурення ми не маємо гарантії в загальному, що цей розв'язок буде збігатись до Θ, коли $t \to \infty$. Виявляється, що для досить загальних випадків систем (3.2) глобальний атрактор є робастним відносно збурень, тобто, на його притягуючі властивості мають незначний вплив невеликі збурення. Ця властивість робастності може бути сформульована в рамках теорії стійкості від входу до стану (Input to State Stability, ISS) як наступна: існують $\beta \in \mathcal{KL}$ і $\gamma \in \mathcal{K}$ такі, що для довільних

$y_0 \in X$ і $u \in U$

$$\|y(t, y_0, u)\|_\Theta \le \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|u\|_\infty),\ t \ge 0, \tag{3.3}$$

де добре відомі класи $\mathcal{K}, \mathcal{KL}$ описані в [144]:

$$\mathcal{K} = \{\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : \text{неперервна, строго зростаюча і } \gamma(0) = 0\},$$
$$\mathcal{L} = \{\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : \text{непереврна, строго спадна і } \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0\},$$
$$\mathcal{KL} = \{\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : \text{неперервна, } \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K},\ \beta(r, \cdot) \in \mathcal{L}\}.$$

Відхилення траєкторії від атрактору характеризується велечиною

$$\|x\|_\Theta = \inf_{\theta\in\Theta} \|x - \theta\|_X.$$

На жаль, ця властивість в загальному випадку не гарантується навіть для випадку $\Theta = \{0\}$, див., наприклад, [51].

В наших дослідженнях ми шукаємо умови, що гарантуватимуть цю властивість, принаймні, локально, а саме, щоб (3.53) виконувалась для $\|y_0\|_\Theta \le r$ і $\|u\|_\infty \le r$ для деякого фіксованого $r > 0$. Остання властивість називається локальним ISS (Local ISS, LISS). Додатково, за досить загальних припущень, ми доводимо властивість асимптотичного приросту (Asymptotic Gain, AG) для (3.2), тобто існування деякого $\gamma \in \mathcal{K}$ такого, що для довільного $y_0 \in X$ і $u \in U$ виконується

$$\limsup_{t\to\infty} \|y(t, y_0, u)\|_\Theta \le \gamma(\|u\|_\infty). \tag{3.4}$$

Для доведення властивості LISS використовується техніка обернених теорем Ляпунова. Для встановлення властивості AG використовується теорія рівномірних атаркторів для неавтономних систем. Ці абстрактні результати в наступних підрозділах застосовані до нелінійних хвильових рівнянь, систем рівнянь типу реакція-дифузія, та зв'язаних систем типу PDE-ODE.

Нехай $(X, \|\cdot\|_X)$ – банахів простір і $0 \in U \subseteq L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Припустимо додатково, що U є трансляційно-інваріантним, тобто

$$\forall\ h \geq 0 \text{ виконується } T(h)U \subset U, \quad \text{де } T(h)u(\cdot) := u(\cdot + h).$$

Позначимо $\mathbb{R}_d := \{(t, s) \mid t \geq s \geq 0\}$.

Означення 3.1. Сімейство відображень $\{S_u : \mathbb{R}_d \times X \to X\}_{u \in U}$ називається сімейством напівпроцесів, якщо для всіх $x \in X$ і всіх $t \geq s \geq \tau \geq 0$ і всіх $h \geq 0$ виконуються наступні три властивості

$$S_u(t, t, x) = x; \tag{3.5}$$

$$S_u(t, s, S_u(s, \tau, x)) = S_u(t, \tau, x); \tag{3.6}$$

$$S_u(t + h, s + h, x) = S_{T(h)u}(t, s, x). \tag{3.7}$$

Зауваження 3.1. З цього означення випливає, що довільне сімейство напівпроцесів задовольняє коциклічну властивість

$$S_u(t + h, 0, x) = S_{T(h)u}(t, 0, S_u(h, 0, x)). \tag{3.8}$$

Зокрема, для незбуреного випадку $u = 0$ напівпроцес S_0 задовольняє властивість напівгрупи

$$S_0(t_1 + t_2, 0, x) = S_0(t_1, 0, S_0(t_2, 0, x)).$$

Означення 3.2. Компактна множина $\Theta \subset X$ називається глобальним атрактором S_0, якщо виконується наступна властивість:

(i) $\Theta = S_0(t, 0, \Theta),\ t \geq 0$,

(ii) для довільної обмеженої $B \subset X$

$$dist(S_0(t, 0, B), \Theta) \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

де для заданих $A, B \subset X$ позначимо $dist(A, B) = \sup\limits_{x \in A} \inf\limits_{y \in B} \|x - y\|_X$.

Зауваження 3.2. Як правило, ми не знаємо точну формулу для глобального атрактора Θ. Отже, важливо сформулювати всі припущення, нав'язані системою, що розглядається, лише в термінах норми $\|\cdot\|_X$ (і не використовувати $\|\cdot\|_\Theta$).

Теорема 3.1. Нехай сімейство напівпроцесів $\{S_u\}_{u\in U}$ таке, що

(i) існують $\sigma \in \mathcal{K}$ і $c_0 > 0$ такі, що $\forall x \in X$ маємо

$$\|S_0(t,0,x)\|_X \leq \sigma(\|x\|_X) + c_0; \tag{3.9}$$

(ii) існує локально обмежена функція $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ така, що для довільного $r > 0$ маємо наступну імплікацію

$$\|x_1\|_X \leq r,\ \|x_2\|_X \leq r\ \Rightarrow$$

$$\|S_0(t,0,x_1) - S_0(t,0,x_2)\|_X \leq e^{c(r)t}\|x_1 - x_2\|_X,\ t \geq 0; \tag{3.10}$$

(iii) існують $\sigma \in \mathcal{K}$ і неперервна функція d із $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{d(r,t)}{t} < \infty$ такі, що $\forall x \in X$, $\forall r > 0$ і $\forall u \in U$ із $\|u\|_\infty \leq r$, $\|x\|_X \leq r$ маємо

$$\|S_u(t,0,x) - S_0(t,0,x)\|_X \leq d(r,t)\sigma(\|u\|_\infty),\ t \geq 0. \tag{3.11}$$

Тоді сімейство напіпроцесів $\{S_u\}_{u\in U}$ має властивість LISS відносно глобального атрактору Θ незбуреної системи.

Доведення. Доведення грунтується на використанні оберенних теорем Ляпунова і складається з кількох кроків, які детально описані в [53]:

Крок 1. Із леми 2.6 в [53], замінюючи (2.27) на (3.9) із умови (i) випливає, що існує $\beta_0 \in \mathcal{KL}$ таке, що

$$\forall x \in X\ \|S_0(t,0,x)\|_\Theta \leq \beta(\|x\|_\Theta, t),\ t \geq 0. \tag{3.12}$$

Крок 2. Із леми 3.1 із [53] з $\lambda = c(r)$ випливає, що для кожного $r > 0$ існує Ліпшиц-неперервна функція V зі сталою Ліпшиця 1 і функцією порівняння $\underline{\psi}$,

$\overline{\psi}$, $\alpha \in \mathcal{K}$ така, що

$$\underline{\psi}(\|x\|_\Theta) \leq V(x) \leq \overline{\psi}(\|x\|_\Theta) \ \forall x \in X, \ \|x\|_X \leq r, \tag{3.13}$$

$$\dot{V}_0(x) := \limsup_{t \to 0+} \frac{1}{t}\Big(V(S_0(t,0,x)) - V(x)\Big) \leq -\alpha(\|x\|_\Theta) \ \forall x \in X, \ \|x\|_X \leq r. \tag{3.14}$$

Крок 3. Візьмемо $r > 0$ і V із попереднього кроку. Тоді із леми 3.2 із [53] і (3.11) випливає, що для деякого $\alpha, \sigma \in \mathcal{K}$ для довільного $u \in U$

$$\dot{V}_u(x) := \limsup_{t \to 0+} \frac{1}{t}\Big(V(S_u(t,0,x)) - V(x)\Big) \leq -\alpha(\|x\|_\Theta) + \sigma(\|u\|_\infty), \ \|x\| \leq r. \tag{3.15}$$

Можна завершити доведення, використавши теорему 3.3 із [53]. □

Нехай $\Sigma \subset U$ – довільна трансляційно-інваріантна множина. Розглянемо сімейство напівпроцесів $\{S_u\}_{u \in \Sigma}$ і позначимо $S_\Sigma := \cup_{u \in \Sigma} S_u$.

Означення 3.3. Компактна множина Θ_Σ називається рівномірним атрактором для $\{S_u\}_{u \in \Sigma}$, якщо для кожної обмеженої $B \subset X$ маємо

$$dist(S_\Sigma(t,0,B), \Theta_\Sigma) \to 0, \ t \to \infty \tag{3.16}$$

і Θ_Σ є мінімальною серед всіх замкнених множин, що задовольняють (3.16), що вкладається в довільну іншу замкнену множину, що задовольняє (3.16).

Зауваження 3.3. Зауважимо, що Θ_Σ не обов'язково є інваріантною (в довільному сенсі) відносно S_Σ.

Наступний результат є відомим в теорії неавтономних систем [38].

Лема 3.1. Нехай $\{S_u\}_{u \in \Sigma}$ *– сімейство напівпроцесів із першою зліченною* Σ *і задовольняє*

(i) існує обмежена $B_0 \subset X$ *така, що для довільної обмеженої* $B \subset X$ $\exists\, T = T(B)$ *s.t.*

$$\forall\, t \geq T \ S_\Sigma(t,0,B) \subset B_0. \tag{3.17}$$

(ii) $\forall \{u_n\} \subset \Sigma \ \forall \ t_n \nearrow \infty \ \forall$ *обмеженої* $\{x_n\} \subset X$

$$\text{послідовність } \{S_{u_n}(t_n, 0, x_n)\} \text{ є передкомпактною в } X. \tag{3.18}$$

Тоді $\{S_u\}_{u\in\Sigma}$ *має рівномірний атрактор* Θ_Σ. *Більше того, якщо додатково* $\forall t > 0$ *відображення*

$$X \times \Sigma \ni (x, u) \mapsto S_u(t, 0, x) \text{ є неперервним}, \tag{3.19}$$

тоді Θ_Σ *є від'ємно інваріантним відносно* S_Σ, *тобто*

$$\Theta_\Sigma \subset S_\Sigma(t, 0, \Theta_\Sigma) \ \forall t \geq 0. \tag{3.20}$$

Зауваження 3.4. У збуреному випадку $\Sigma = \{0\}$ із умов (3.17)-(3.19) випливає існування глобального атрактору Θ для напівгрупи S_0.

Наступна лема поширює результати із [79], що були доведені для автономних систем:

Лема 3.2. Припустимо, що Σ *залежить від параметра* λ, *так що* $\Sigma = \Sigma(\lambda)$, *де* λ *належить деякому метричному простору* Λ, λ_0 *є неізольованою точкою* Λ. *Припустимо, що*

(i) $\forall \ \lambda \in \Lambda$ *сімейство напівпроцесів* $\{S_u\}_{u\in\Sigma(\lambda)}$ *задовольняє (3.17) для деякої множини* B_0, *що не залежить від* λ;

(ii) $\forall \ \lambda \in \Lambda$ *сімейство напівпроцесів* $\{S_u\}_{u\in\Sigma(\lambda)}$ *має від'ємно інваріантний рівномірний атрактор* $\Theta_{\Sigma(\lambda)}$;

(iii) $\forall \ \lambda_k \to \lambda_0$ *кожна послідовність* $\{z_k \in \Theta_{\Sigma(\lambda_k)}\}$ *містить збіжну підпослідовність;*

(iv) якщо $\lambda_k \to \lambda_0$, $\xi_k \in S_{\Sigma(\lambda_k)}(t, 0, z_k)$, $t > 0$, $z_k \to z$, *то з точністю до підпослідовності* $\xi_k \to \xi \in S_{\Sigma(\lambda_0)}(t, 0, z)$.

Тоді

$$dist(\Theta_{\Sigma(\lambda)}, \Theta_{\Sigma(\lambda_0)}) \to 0, \ \lambda \to \lambda_0. \tag{3.21}$$

Зауваження 3.5. Припущення (iii) в останній лемі виконується, якщо

$$\forall\ \lambda_k \to \lambda_0\ \forall t_k \nearrow \infty\ \forall \xi_k \in S_{\Sigma(\lambda_k)}(t,0,B_0)\ \{\xi_k\}\ \text{є передкомпактною в}\ X. \quad (3.22)$$

Доведення. Припустимо від супротивного, що (3.21) не виконується. Це означає $\exists\ \lambda_k \to \lambda_0\ \exists\ \epsilon > 0\ \exists\ z_k \in \Theta_{\Sigma_k}$ такі, що $z_k \notin O_\epsilon(\Theta_{\Sigma(\lambda_0)})$. В силу (iii) з точністю до підпослідовності, отримаємо $z_k \to z$. Виберемо $t > 0$ таке, що $S_{\Sigma(\lambda_0)}(t,0,B_0) \subset O_{\epsilon/2}(\Theta_{\Sigma(\lambda_0)})$. Із властивості напівінваріантності маємо, що

$$z_k \in \Theta_{\Sigma(\lambda_k)} \subset S_{\Sigma(\lambda_k)}(t,0,\Theta_{\Sigma(\lambda_k)})$$

Отже, $z_k \in S_{\Sigma(\lambda_k)}(t,0,\eta_k)$ для деякого $\eta_k \in \Theta_{\Sigma(\lambda_k)} \subset B_0$ і в силу (iii) маємо $\eta_k \to \eta$. Тому, використовуючи (iv) ми приходимо до наступної суперечності

$$z_k \to z \in S_{\Sigma(\lambda_0)}(t,0,\eta) \subset O_{\epsilon/2}(\Theta_{\Sigma(\lambda_0)}),$$

що й доводить лему. □

Теорема 3.2. Припустимо, що сім'я множин $\{\Sigma(u)\}_{u\in U}$ і відповідне сімейство напівпроцесів задовольняють умови леми 3.2 із $\Lambda = U$, $\lambda_0 = 0$. Також припустимо, що $\Sigma(0) = \{0\}$ і

$$\forall\ u \in U \quad u \in \Sigma(u).$$

Нехай Θ – глобальний атрактор напівгрупи S_0. Тоді $\{S_u\}_{u\in U}$ має властивість асимптотичного приросту AG відносно Θ.

Доведення. Для кожного $u \in U$, $y \in X$ і $z_u \in \Sigma(u)$ маємо

$$\|S_u(t,0,y)\|_\Theta = \inf_{\theta\in\Theta} \|S_u(t,0,y) - \theta\|_X \le \|S_u(t,0,y) - z_u\|_X + dist(\Theta_{\Sigma(u)},\Theta).$$

Але $S_u(t,0,y) \in S_{\Sigma(u)}(t,0,y)$, тому

$$\|S_u(t,0,y)\|_\Theta \le dist(S_{\Sigma(u)}(t,0,y),\Theta_{\Sigma(u)}) + dist(\Theta_{\Sigma(u)},\Theta).$$

Із притягуючої властивості $\Theta_{\Sigma(u)}$ отримуємо

$$\limsup_{t\to\infty} dist(S_{\Sigma(u)}(t,0,y),\Theta_{\Sigma(u)}) = 0.$$

Покладемо $\gamma(s) := \sup\limits_{\|u\|_\infty \le s} dist(\Theta_{\Sigma(u)},\Theta) + s$. Тоді в силу (3.21) $\gamma \in \mathcal{K}$ і

$$\forall\ u \in U \ \ dist(\Theta_{\Sigma(u)},\Theta) \le \gamma(\|u\|_\infty)$$

і ми отримаємо потрібний результат. Теорема доведена.

□

3.2 Застосування до хвильового рівняння

Будемо використовувати загальний підхід, викладений в попередньому підрозді.

Розглядаємо наступне дисипативне гіперболічне рівняння

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + ky_t(x,t) - \triangle y(x,t) + f(y(x,t)) = 0,\ t>0,\ x\in\Omega, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.23}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$ – обмежена відкрита підмножина із гладкою межею, $k > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ і виконуються наступні умови:

$$\exists\ C > 0\ \forall\ s \in \mathbb{R}\ |f'(s)| \le C\left(1 + |s|^r\right),\ r < \frac{n}{n-2}. \tag{3.24}$$

Введемо наступні позначення:

$$X = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega),\ z(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \triangle & -k \end{pmatrix},\ \Phi(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(y) \end{pmatrix}$$

Тут і далі y_t позначатиме розподілену похідну y відносно t.

Після цього ми можемо переписати (3.23) у формі (3.1)

$$\frac{d}{dt}z = Az + \Phi(z). \tag{3.25}$$

За додаткових припущень

$$\liminf_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s} > -\lambda_1, \tag{3.26}$$

де $\lambda_1 > 0$ – перше власне число $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$, відомо [35], що $\forall\ T > 0\ \forall z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$ задача (3.25) має єдиний слабкий розв'язок (див. означення нижче) $z(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix} \in C([0,T];X)$ такий, що $z(0) = z_0$.Всі такі розв'язки, що продовжуються на $[0,+\infty)$, породжують напівгрупу $S_0(\cdot,0,\cdot) : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto X$. Також відомо [35], що напівгрупа S_0 має глобальний атрактор Θ.

Тепер розглянемо збурену систему

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + ky_t(x,t) - \triangle y(x,t) + f(y(x,t)) = h(x)u(t), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.27}$$

де $h \in L^2(\Omega)$, $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Означення 3.4. Функція $z(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix} \in L^\infty(\tau,T;X)$ називається слабким розв'язком задачі (3.27) на (τ,T), якщо для довільного $\psi \in H_0^1(\Omega)$ і для всіх $\eta \in C_0^\infty(\tau,T)$ маємо рівність

$$-\int_\tau^T (y_t,\psi)\eta_t + \int_\tau^T \Big(k(y_t,\psi) + (y,\psi)_{H_0^1} + (f(y),\psi) - (h,\psi)u\Big)\eta = 0, \tag{3.28}$$

де через $\|\cdot\|$ and $(\cdot,\cdot)$ позначаємо норму і скалярний добуток в просторі $L^2(\Omega$.

Зауважимо, що якщо функція $z(\cdot) \in L^\infty_{loc}(\tau,\infty;X)$ задовольняє (3.28) для кожного $T > \tau$, тоді $z(\cdot)$ називається глобальним слабким розв'язком (3.27).

Щоб гарантувати існування слабких розв'язків нам потрібно дещо більш сильніші припущення для нелінійного члена f [38]. Тому ми припускаємо, що

(3.24) виконується і замість (3.26) припустимо

$$\begin{gathered}\exists\ C_i > 0,\ i = 1,2,3, \quad \forall\ s \in \mathbb{R} \text{ для } F(s) := \int\limits_0^s f(p)dp \\ F(s) \geq -ms^2 - C_1,\ f(s)s - C_2F(s) + ms^2 \geq C_3,\end{gathered} \tag{3.29}$$

де $m \in (0, \lambda_1)$ є достатньо малим числом.

Зауваження 3.6. Із умов (3.29) випливає (3.26) для досить малих m. Зокрема, ми маємо існування глобального атрактору Θ для випадку $u = 0$.

Зауваження 3.7. Нелінійні гіперболічні рівняння з нелінійними членами, що задовольняють (3.24),(3.26) або (3.24),(3.29) широко використовуються в застосуваннях [151]. Як приклад можна розглянути рвняння синус-Гордона із $f(s) = b \sin s$, або рівняння релятивістської квантової механіки із $f(s) = |s|^r s$.

Відомо [38], що за умов (3.24),(3.29) $\forall\ u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ $\forall\ \tau \geq 0$ $\forall z_\tau \in X$ задача (3.27) має єдиний глобальний слабкий розв'язок $z(\cdot) \in C([\tau, +\infty); X)$, такий що $z(\tau) = z_\tau$.

Отже, сімейство напівпроцесів $\{S_u : \mathbb{R}_d \times X \to X\}_{u \in U}$,

$$S_u(t, \tau, z_\tau) := z(t),$$

$$z(\cdot) \text{ є глобальним слабким розв'язком of } (3.27),\ z(\tau) = z_\tau, \tag{3.30}$$

є коректно визначеним для довільної трансляційно-інваріантної множини $U \subseteq L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Зафіксуємо $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$.

Для $z(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix} \in S_u(\cdot, 0, z_0)$ покладемо

$$\Psi(t) := \|\nabla y(t)\|^2 + \|y_t(t) + \alpha y(t)\|^2 + 2(F(y(t), 1).$$

Тоді для досить малих $\alpha, m \in (0, \lambda_1)$ (див. лему 4.1 в [38]) існують $\delta' > 0$, $C_4 > 0$ такі, що

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) + \delta'\Psi(t) \le C_4(1 + |u(t)|). \tag{3.31}$$

В силу (3.24)

$$|F(s)| \le C_5 \left(1 + |s|^{\frac{2n-2}{n-2}}\right). \tag{3.32}$$

Використовуючи (3.32), для досить малих α маємо, що для деяких додатніх δ, C_6 і для всіх $t \ge s \ge 0$

$$\|y_t(t)\|^2 + \|y(t)\|^2_{H_0^1} \le$$

$$C_6\Big((\|y_t(s)\| + \|y(s)\|_{H_0^1})^{\frac{2n-2}{n-2}} e^{-\delta(t-s)} + \int\limits_s^t |u(p)|^2 e^{-\delta(t-p)} dp + 1\Big) \tag{3.33}$$

Зокрема, для $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ з нерівності (3.33) випливає, що $\forall\ t \ge s \ge 0$

$$\|z(t)\|^2_X \le C_7\Big(\|z(s)\|_X^{\frac{2n-2}{n-2}} e^{-\delta(t-s)} + \|u\|^2_\infty + 1\Big) \tag{3.34}$$

Теорема 3.3. За умов (3.24),(3.29) сімейство напівпроцесів (3.30) із $U = L^\infty(\mathbb{R}_+)$ *має властивість LISS відносно глобального атрактора* Θ *незбуреної системи (3.23).*

Доведення. Нам потрібно довести умови (i)-(iii) з попередньої теореми.

Із оцінки 3.34) випливає умова (i) із $\sigma(p) = p^{\frac{n-1}{n-2}}$.

В силу (3.24), нерівності Гельдера і вкладення простору Соболєва $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega$ маємо, що для кожного $y_1, y_2 \in H_0^1(\Omega)$, $\|y_1\|_{H_0^1} \le r$, $\|y_2\|_{H_0^1} \le r$ виконується наступна оцінка

$$\int\limits_\Omega |f(y_1) - f(y_2)|^2 dx \le$$

$$C_8\Big(1 + \|y_1\|^{\frac{2}{n-2}}_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + \|y_2\|^{\frac{2}{n-2}}_{L^{\frac{2n}{n-2}}}\Big)\|y_1 - y_2\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \le C(r)\|y_1 - y_2\|^2_{H_0^1} \tag{3.35}$$

для деякого $C(r) > 0$.

Тому для $w(t) = y_1(t) - y_2(t)$, де y_1 і y_2 це розв'язки (3.27) зі збуреннями u_1 і u_2, маємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w_t(t)\|^2 + \|w(t)\|^2_{H_0^1}) + k\|w_t(t)\|^2 \leq$$
$$\|f(y_1) - f(y_2)\|\|w_t\| + \|h\|\|w_t\||u_1(t) - u_2(t)|. \tag{3.36}$$

Покладемо $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$ і припутимо, що $\|z_1(0)\|_X \leq r$, $\|z_2(0)\|_X \leq r$. Тоді в силу (3.34)

$$\forall\ t \geq 0\ \ \max\{\|z_1(t)\|_X, \|z_2(t)\|_X\} \leq \sqrt{C_7}\Big(r^{\frac{n-1}{n-2}} + r^2 + 1\Big). \tag{3.37}$$

Отже, із (3.35),(3.36) можемо знайти потрібну додатну сталу $c(r)$ таку, що

$$\frac{d}{dt}(\|w_t(t)\|^2 + \|w(t)\|^2_{H_0^1}) \leq c(r)(\|w_t(t)\|^2 + \|w(t)\|^2_{H_0^1}). \tag{3.38}$$

Тоді, застосування лему Гронуола закінчує доведення (ii).

Для доведення (iii) покладемо $u_1 = u$, $u_2 = 0$, $z_1(0) = z_2(0)$, $\|z_1(0)\|_X \leq r$, $\|u\|_\infty \leq r$. Тоді нерівність (3.37) виконується і для деякого C_9 отримуємо для довільного $T \geq t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}(\|w_t(t)\|^2 + \|w(t)\|^2_{H_0^1}) \leq$$
$$c(r)(\|w_t(t)\|^2 + \|w(t)\|^2_{H_0^1}) + C_9\|u\|_\infty \sup_{t\in[0,T]}(\|w_t(t)\| + \|w(t)\|_{H_0^1}). \tag{3.39}$$

Проінтегрувавши цю нерівність по $[0, t]$, отримаємо

$$\|w_t(t)\|^2 + \|w(t)\|^2_{H_0^1} \leq$$

$$c(r)\int_0^t(\|w_t\|^2 + \|w\|^2_{H_0^1})ds + C_9\|u\|_\infty T \sup_{t\in[0,T]}(\|w_t(t)\| + \|w(t)\|_{H_0^1})$$

Тому з леми Гронуола випливає, що

$$\sup_{t\in[0,T]}(\|w_t(t)\| + \|w(t)\|_{H_0^1}) \leq C_{10}\|u\|_\infty T e^{c(r)T} \tag{3.40}$$

і отримуємо потрібний результат. Теорема доведена. $\square$

Для доведення властивості асимптотичного приросту нам потрібні додаткові обмеження на збурення.

Позначимо через U_1 всі функції із $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ такі, що

$$\sup_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1}|u(s+l)-u(s)|^2ds \leq \alpha(|l|), \tag{3.41}$$

де $\alpha(\cdot)$ можуть залежати від u і $\alpha(p)\to 0$, $p\to 0+$.

Зауваження 3.8. Умова (3.41) виконується для широкого класу функцій збурення. Наприклад, обмежені кусково неперервні функції, що є глобально Ліпшицевими між точками розривів, належать до цього класу.

Відомо [38], що U_1 є трансляційно-інваріантною і кожна $u\in U_1$ є трансляційно-компактною в $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$, тобто,

множина $\Sigma(u) := cl_{L^2_{loc}}\{u(\cdot+h)\mid h\geq 0\}$ є компактною в $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$

де $cl_{L^2_{loc}}\{\cdot\}$ означає замкненість множини в L^2_{loc}. Більше того, $\forall\, h\geq 0\ T(h)\Sigma(u)\subset\Sigma(u)$ і $\forall\, v\in\Sigma(u)$

$$\sup_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1}|v(s)|^2ds \leq \sup_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1}|u(s)|^2ds \leq \|u\|^2_\infty. \tag{3.42}$$

Використовуючи результати із глави 6 із [38], можемо зробити висново, що для кожного $u\in U_1$ сімейство напівпроцесів $\{S_v\}_{v\in\Sigma(u)}$, визначене за допомогою (3.30), має від'ємно інваріантний рівномірний атрактор $\Theta_{\Sigma(u)}$.

Теорема 3.4. За умов (3.24),(3.29) сімейство напівпроцесів (3.30) із множиною збурення U_1 задовольняє властивість асимптотичного приросту AG відносно глобального атрактора Θ незбуреної системи (3.23).

Доведення. Спочатку доведемо властивість асимптотичного приросту

$$\limsup_{t\to\infty}\|S_u(t,0,z_0)\|_\Theta \leq \gamma(\|u\|_\infty) \tag{3.43}$$

для довільного $z_0 \in X$ і для всіх збурень із $\|u\|_\infty \le r$, $r > 0$. Для цього перевіримо умови теореми 3.2 (фактиично, умови (i)-(iv) леми 3.2) для $\Lambda = U_1 \cap \{\|u\|_\infty \le r\}$ із метрики, індукованої із $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ і для $\lambda_0 = 0$.

Припущення (i) випливає із оцінок (3.33), (3.42) і нерівності

$$\forall\, t > 0 \ \int\limits_0^t |v(s)|^2 e^{-\delta(t-s)} ds = (1 - e^{-\delta})^{-1} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int\limits_t^{t+1} |v(s)|^2 ds.$$

Припущення (ii) виконується для кожного $u \in U_1$ в силу умови (3.41) і Твердження 4.4 із [38].

Для доведення припущень (iii) і (iv) нам потрібен наступний допоміжний результат.

Лема 3.3. [72] Нехай $z_n(\cdot) = \begin{pmatrix} y_n(\cdot) \\ y_{nt}(\cdot) \end{pmatrix}$ *– довільна послідовність слабких розв'язків задачі (3.27) на* $(0, T)$ *із* $u = v_n$, $z_n(0) = z_n^0$, *і*

$$v_n \to v \text{ слабко в } L^2(0, T),$$

$$z_n^0 \to z^0 \text{ слабко в } X.$$

Тоді

$$\begin{aligned} y_n &\to y \ \text{ в } C([0, T]; L^2(\Omega) \cap (H_0^1(\Omega))_w), \\ y_{nt} &\to y_t \ \text{ в } C([0, T]; H^{-1}(\Omega) \cap (L^2(\Omega))_w), \end{aligned} \tag{3.44}$$

де нижній індекс біля w *означає збіжність відносно слабкої топології у відповідному просторі,* $z(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix}$ *є слабким розв'язком задачі (3.27) на* $(0, T)$ *із* $u = v$ *і* $z(0) = z^0$.

Якщо, більше того,

$$v_n \to v \quad \text{в } L^2(0, T),$$

$$z_n^0 \to z^0 \quad \text{в } X,$$

тоді

$$z_n \to z \text{ в } C([0,T];X). \tag{3.45}$$

Візьмемо $v_k \in \Sigma(u_k)$, $u_k \to 0$ in $L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Тоді в силу (3.42) ми маємо $v_k \to 0$ in $L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Тому із (3.45), якщо $\xi_k \in S_{\Sigma(u_k)}(t,0,z_k^0)$ і $z_k^0 \to z^0$ в X, тоді з точністю до підпослідовності $\xi_k \to \xi \in S_0(t,0,z^0)$ і отримуємо припущення (iv).

Доведемо властивість (3.22), з якої випливає припущення (iii). Тому розглянемо

$$\xi_n \in S_{v_n}(t_n,0,\eta_n),\ v_n \to 0 \text{ в } L^\infty(\mathbb{R}_+),\ t_n \nearrow \infty,\ \eta_n \to \eta \text{ в } X.$$

Тоді $\xi_n = z_n(t_n)$, $z_n(\cdot)$ є глобальним слабким розв'язком задачі (3.27) із $u = v_n$, $z_n(0) = \eta_n$. Хочемо довести передкомпактність $\{\xi_n\}$ in X. Для цього використаємо метод, запропонований Болом в [35] для автономного випадку.

В силу припущення дисипативності (i) з точністю до підпослідовності $\forall\ M > 0$ існує ξ_M таке, що

$$\xi_n \to \xi \text{ слабко в } X,\ z_n(t_n - M) \to \xi_M \text{ слабко в } X. \tag{3.46}$$

Більше того, $\forall\ t \geq 0$

$$z_n(t_n - M + t) \in S_{v_n}(t_n - M + t, t_n - M, z_n(t_n - M)) = S_{T(t_n - M)v_n}(t, 0, z_n(t_n - M)).$$

Тому $z_n(t_n - M + t) = \bar{z}_n(t)$,де $\bar{z}_n(\cdot) = \begin{pmatrix} \bar{y}_n(\cdot) \\ \bar{y}_{nt}(\cdot) \end{pmatrix}$ є глобальним слабким розв'язком (3.27)із $u(\cdot) = v_n(\cdot + t_n - M)$, $\bar{z}_n(0) = z_n(t_n - M)$. Ми також маємо, що

$$\bar{v}_n(\cdot) := v_n(\cdot + t_n - M) \to 0 \text{ в } L^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Отже, із леми 3.3 $\forall\ t \geq 0$

$$\bar{z}_n(t) \to \bar{z}(t) = S_0(t,0,\xi_M) \text{ слабко в } X.$$

Зокрема,

$$\bar{z}_n(M) = \xi_n \to \bar{z}(M) = \xi \text{ слабко в } X.$$

Відомо [72], що кожний слабкий розв'язок (3.27) задовольняє рівність

$$\frac{d}{dt} I(z(t)) = -kI(z(t)) + H_u(t, z(t)), \tag{3.47}$$

де

$$I(z) = \frac{1}{2}\|y_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla y\|^2 + (F(y), 1) + \frac{k}{2}(y_t, y),$$
$$H_u(t, z) = k(F(y), 1) - \frac{k}{2}(f(y), y) + \frac{k}{2}u(t)(h, y) + u(t)(h, y_t).$$

Тепер запишемо (3.47) для $\bar{z}_n$. Після інтегрування по $[0, M]$ отримаємо

$$I(\xi_n) = I(z_n(t_n - M))e^{-kM} + \int_0^M e^{k(p-M)} H_{\bar{v}_n}(p, \bar{z}_n(p))dp. \tag{3.48}$$

В силу леми 3.3

$$\bar{y}_n \to \bar{y} \text{ в } C([0, M]; L^2(\Omega)).$$

Отже,

$$F(\bar{y}_n(t, x)) \to F(\bar{y}(t, x)), \;\; f(\bar{y}_n(t, x))\bar{y}_n(t, x) \to f(\bar{y}(t, x))\bar{y}(t, x) \text{ м.в.}$$

В силу (3.24) послідовності $\{F(\bar{y}_n)\}$ і $\{f(\bar{y}_n)\bar{y}_n\}$ є обмеженими в $L^{\frac{2n}{n-2}}((0, M)\times\Omega)$. Тому вони слабко збігаються до $\{F(\bar{y})\}$ and $\{f(\bar{y})\bar{y}\}$ відповідно. Використовуючи збіжність $\bar{v}_n \to 0$ in $L^2(0, M)$, отримаємо

$$\int_0^M e^{k(p-M)} H_{\bar{v}_n}(p, \bar{z}_n(p))dp \to \int_0^M e^{k(p-M)} H_0(\bar{z}(p))dp, \;\; n \to \infty, \tag{3.49}$$

де $H_0(\bar{z}) = kF(\bar{y}, 1) - \frac{k}{2}(f(\bar{y}), \bar{y})$.

Використовуючи оцінку (3.33, приходимо до висновку, що $\forall\, t \geq 0$

$$\limsup_{n\to\infty} |I(z_n(t))| \leq C,$$

де стала C не залежить від M і t.

Тому із (3.48) отримуємо

$$\limsup_{n\to\infty} I(\xi_n) \le Ce^{-kM} + \int\limits_0^M e^{k(p-M)} H_0(\bar{z}(p))dp =$$

$$= Ce^{-kM} + I(\xi) - I(\xi_M)e^{-kM} \le 2Ce^{-kM} + I(\xi).$$

Використавши (3.49), отримаємо

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|\xi_n\|_X \le 2Ce^{-kM} + \frac{1}{2}\|\xi\|_X.$$

Перейшовши до границі при $M \to \infty$, отримаємо сильну збіжність ξ_n до ξ в X і, відтак, припущення (iii).

Тому, в силу теореми 3.2 можемо стверджувати, що для кожного $r > 0$ існує $\gamma_r \in \mathcal{K}$ таке, що для кожного $u \in U_1$ із $\|u\|_\infty \le r$ і для довільного $z_0 \in X$ виконується наступна нерівність

$$\limsup_{t\to\infty} \|S_u(t,0,z_0)\|_\Theta \le \gamma_r(\|u\|_\infty). \tag{3.50}$$

□

3.3 Застосування до системи реакція-дифузія.

У даному підрозділі ми використовуємо загальну схему підрозділу 3.1 для доведення робастної стійкості глобального атрактору системи типу реакція-дифузія. При цьому ми не накладаємо умов, які забезпечують єдиність розв'язку початкової задачі.

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо систему рівнянь типу реакція-дифузія

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + g(x) + d(t,x), \ x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.51}$$

де $u = u(t,x) = (u^1(t,x),...,u^N(t,x))$ – невідома вектор-функція, $f = (f^1,...,f^N)$, $g = (g^1,...,g^N)$ – задана функція, a – дійсна матриця $N \times N$ така, що $\frac{1}{2}(a+a^*) \geq \mu I$, $\mu > 0$, $d = (d^1,...,d^N)$ – зовнішні збурення.

Припустимо, що виконуються наступні властивості:

$$g \in (L^2(\Omega))^N, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N),$$

$\exists\ C_1, C_2 > 0,\ \gamma_i > 0,\ p_i \geq 2,\ i = \overline{1,N}$ такі, що $\forall\ v \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^N |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \leq C_1(1 + \sum_{i=1}^N |v^i|^{p_i}),$$

$$\sum_{i=1}^N f^i(v)v^i \geq \sum_{i=1}^N \gamma_i |v^i|^{p_i} - C_2,$$

В подальшому будемо використовувати стандартні функціональні простори:

$$H = (L^2(\Omega))^N \text{ та } V = (H_0^1(\Omega))^N.$$

Позначимо

$$p = (p_1,...,p_N),\ L^p(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times ... \times L^{p_N}(\Omega).$$

Відомо [41], що за таких припущень для будь-яких збурень $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$ (навіть для $d \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$) задача (3.51) є глобально розв'язною у слабкому сенсі у фазовому просторі H, тобто для будь-якого $u_0 \in H$ існує функція $u = u(t,x) \in L^2_{loc}(0,+\infty;V) \bigcap L^p_{loc}(0,+\infty;L^p(\Omega))$ така, що для будь-яких $T > 0,\ v \in V \cap L^p(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)v(x)dx + \int_\Omega \Big(a\nabla u(t,x)\nabla v(x)+$$
$$+f(u(t,x))v(x) - g(x)v(x) - d(t,x)v(x)\Big)dx = 0$$

в сенсі скалярних розподілів на $(0,T)$, та $u(0,x) = u_0(x)$. Єдиність такого розв'язку не гарантується.

За рахунок включення $u \in C([0, +\infty); H)$ остання рівність має сенс.

Розглянемо незбурену систему ($d \equiv 0$)

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + g(x), \ x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.52}$$

Відомо [41], що відповідна багатозначна напівгрупа $S : \mathbb{R}_+ \times H \mapsto 2^H$

$$S(t, u_0) = \{u(t)|\ u(\cdot) \text{ є глобальним слабким розв'язком (3.52)},\ u(0) = u_0\}$$

має глобальний атрактор Θ в H, тобто, існує компактна множина $\Theta \subset H$ така, що виконуються наступні властивості:

(i) $\Theta = S(t, \Theta),\ t \geq 0$,

(ii) для будь-якої обмеженої множини $B \subset H$

$$dist(S(t, B), \Theta) \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

де для заданих $A, B \subset H$ ми позначаємо

$$S(t, B) = \bigcup_{b \in B} S(t, b),$$

$$dist(A, \Theta) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in \Theta} \|x - y\|_H.$$

Дана властивість гарантує, що будь-який розв'язок (3.52) прямує до Θ при $t \to \infty$. Нас цікавить довгострокова поведінка відповідних розв'язків у випадку системи (3.51), на яку діє зовнішнє збурення d.

Нехай задано початковий стан $u_0 := u(0) \in H$ та збурюючий сигнал d. Позначимо $S_d(t, u_0)$ множину всіх розв'язків (3.51) з $u(0) = u_0$. Через наявність збурення загалом немає гарантії, що розв'язки будуть збігатися до Θ при $t \to \infty$. Виявляється, що глобальний атрактор є робастним при збуренні, тобто збурення малої величини впливають на його властивості незначним чином.

Ця властивість робастності може бути виражена в рамках теорії ISS наступним чином: існує $\beta \in \mathcal{KL}$ та $\gamma \in \mathcal{K}$ такі, що для будь-яких $u_0 \in H$ та $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$

$$\|S_d(t, u_0)\|_\Theta \le \beta(\|u_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty),\ t \ge 0, \tag{3.53}$$

де класи $\mathcal{K}$, $\mathcal{KL}$ визначені вище,

$$\|d\|_\infty = \mathrm{esssup}_{t\ge 0}\|d(t)\|_H, \text{якщо } d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H),$$

$$\|u\|_\Theta = \inf_{\theta\in\Theta} \|u - \theta\|_H, \text{якщо } u \in H,$$

$$\|U\|_\Theta = \sup_{u\in U} \|u\|_\Theta, U \subset H.$$

Варто зазначити, що в загальному випадку $\Theta \ne \{0\}$. Більш того, структура такого атрактора дуже складна [97]. Тому оцінки типу (3.53) не можна отримати за допомогою прямих апріорних оцінок.

На жаль, властивість (3.53), взагалі кажучи, не гарантується навіть у випадку $\Theta = \{0\}$, як було показано в прикладі [57].

У цій роботі доведено наступну властивість AG, яка дуже близька до (3.53): існує $\gamma \in \mathcal{K}$ таке, що для будь-якого $u_0 \in H$ та будь-якого $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ виконується

$$\lim_{t\to\infty}\sup \|S_d(t, u_0)\|_\Theta \le \gamma(\|d\|_\infty). \tag{3.54}$$

Надалі будемо вважати, що $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$, $\|d\|_\infty \le R_0$. Опираючись на [41], розглянемо множину

$$\Sigma(d) = cl_{L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+;H)}\{d(\cdot + \tau) \,|\, \tau \ge 0\},$$

де $cl_X A$ означає замикання множини A в топології простору X. Відомо, що $\Sigma(d)$ є інваріантною щодо зсувів, компактною в $L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$ множиною, і

$$\forall h \in \Sigma(d)\ \|h\|_+^2 := \sup \int_t^{t+1} \|h(s)\|_H^2 dx \le \|d\|_\infty^2. \tag{3.55}$$

Розглянемо сім'ю множинозначних відображень

$$\{S_h : \mathbb{R}_+ \times H \mapsto 2^H\}, \tag{3.56}$$

де $S_h(t,u_0)$=$\{u(t)\,|\,u(\cdot)$ є розв'язком (3.51) зі збу- ренням $\alpha = h, u(0) = u_0\}_{h\in\Sigma(d)}$.

Виявляється, що властивість робастної стійкості типу (3.54) можна встановити, використовуючи властивості рівномірних атракторів (3.56). Позначимо $S_\Sigma(t,u_0) = \bigcup\limits_{h\in\Sigma} S_h(t,u_0)$.

Означення 3.5. Компактна множина Θ_Σ⊂H називається рівномірним атрактором сім'ї $\{S_h\}_{h\in\Sigma}$, якщо для довільної обмеженої B⊂H

$$dist(S_\Sigma(t,B),\Theta_\Sigma) \to 0 \tag{3.57}$$

і є мінімальною замкненою множиною, що задовольняє (3.57).

Теорема 3.5. [41, 97] Для кожного збурення d, $\|d\|_\infty \le R_0$, сім'я відображень $\{S_h\}_{h\in\Sigma(d)}$, що визначена в (3.56), *має рівномірний атрактор $\Theta_{\Sigma(d)}$, причому*

$$\Theta_{\Sigma(d)} \subset S_{\Sigma(d)}(t,\Theta_{\Sigma(d)})\ \forall t \ge 0. \tag{3.58}$$

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 3.6. Для розв'язків задачі (3.51) *з обмеженими збуреннями $\|d\|_\infty \le R_0$ існує функція $\gamma \in K$ така, що $\forall u_0 \in H$*

$$\limsup_{t\to\infty} \|S_d(t,u_0)\|_\Theta \le \gamma(\|d\|_\infty), \tag{3.59}$$

де $\Theta \subset H$ – глобальний атрактор незбуреної системи (3.52).

Доведення. Припустимо, що ми маємо граничну рівність

$$dist(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta) \to 0, \|d\|_\infty \to 0. \tag{3.60}$$

Доведемо, що з (3.60) випливає (3.59). Дійсно, за побудовою $\Sigma(0)=\{0\}$ і $d\in\Sigma(d)$. Отже, для $u_0{\in}H$, $z{\in}\Theta_{\Sigma(d)}, t{>}0$, $u(t){\in}S_d(t,u_0)$ маємо: для $\theta{\in}\Theta$

$$\|u(t){-}\theta\|_H{\le}\|u(t){-}z\|_H{+}\|z{-}\theta\|_H \;\Rightarrow$$

$$\inf_{\theta\in\Theta}\|u(t){-}\theta\|_H{\le}\|u(t){-}z\|_H{+}\inf_{\theta\in\Theta}\|z{-}\theta\|_H \Rightarrow$$

$$\inf_{\theta\in\Theta}\|u(t){-}\theta\|_H{\le}\inf_{z\in\Theta_{\Sigma(d)}}\|u(t){-}z\|_H +$$

$$+\sup_{z\in\Theta_{\Sigma(d)}}\inf_{\theta\in\Theta}\|z{-}\theta\|_H \Rightarrow$$

$$\|u(t)\|_\Theta{\le}dist(u(t),\Theta_{\Sigma(d)}){+}dist(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta)\Rightarrow$$

$$\|S_d(t,u_0)\|_\Theta{\le}dist(S_{\Sigma(d)}(t,u_0),\Theta_{\Sigma(d)}) +$$

$$+dist(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta).$$

Оскільки $\Theta_{\Sigma(d)}$ – рівномірний атрактор, то з (3.57) для кожного d маємо:

$$dist(S_{\Sigma(d)}(t,u_0),\Theta_{\Sigma(d)})\to 0, t\to+\infty.$$

Покладемо

$$\gamma(s){:=}\sup_{\|d\|_\infty\le s}dist(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta){+}s.$$

В силу (3.60) $\gamma{\in}K$ і

$$dist(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta){\le}\gamma(\|d\|_\infty),$$

що і означає виконання (3.59).

Отже, доведемо (3.60). З [97] маємо наступні властивості розв'язків задачі (3.51) при

$$d{=}h{\in}L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H), \|h\|_+{<}\infty:$$

1) дисипативність: $\forall u_0{\in}H\ \forall h{\in}L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H),\ \|h\|_+{<}\infty\ \forall u(\cdot){\in}S_h(\cdot,u_0)\ \forall t{\ge}0$

$$\|u(t)\|^2_H\le\|u_0\|^2_He^{-\delta t}+K(\|h\|^2_++1), \tag{3.61}$$

де додатні константи δ, K залежать лише від констант задачі (3.51);

2) залежність від u_0, h: якщо $h_n \to h$ в $L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$, $u_0^n \to u_0$ слабо в H, то по деякій підпослідовності для $t > 0$:

$$S_{h_n}(t, u_0^n) \ni u_n(t) \to u(t) \in S_h(t, u_0) \text{ в } H. \tag{3.62}$$

Тепер від супротивного припустимо, що (3.60) не має місця. Це означає, що $\exists d_n \to 0$ в $L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ $\exists \epsilon > 0$ $\exists z_n \in \Theta_{\Sigma(d_n)}$ такі, що

$$dist(z_n, \Theta) \geq \epsilon. \tag{3.63}$$

З (3.61) виводимо: $\forall u(\cdot) \in S_{\Sigma(d)}(\cdot, u_0)$ $\forall t \geq 0$

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u_0\|_H^2 e^{-\delta t} + K(\|d\|_\infty^2 + 1). \tag{3.64}$$

Оскільки в силу [97] $\xi \in \Theta_\Sigma \Leftrightarrow \xi = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n$, де $\xi_n \in S_\Sigma(t_n, B)$ де $t_n \nearrow \infty$, $B \subset H$ – обмежена, то з (3.64) маємо:

$$\forall \xi \in \Theta_{\Sigma(d)} \ \|\xi\|_H^2 \leq K(\|d\|_\infty^2 + 1),$$

тобто існує обмежена $B_0 \subset H$ така, що $\forall d$, $\|d\|_\infty \leq R_0$

$$\Theta_{\Sigma(d)} \subset B_0.$$

Тоді $z_n \in \Theta_{\Sigma(d_n)} \subset S_{\Sigma(d_n)}(t, \Theta_{\Sigma(d_n)}) \subset S_{\Sigma(d_n)}(t, B_0)$.

Отже, $z_n = u_n(t) \in S_{h_n}(t, \xi_n)$, де $\xi_n \to \xi$ слабо в H, $\|h_n\|_+ \leq \|d_n\|_\infty \to 0$. Звідси $h_n \to 0$ в $L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$ і за властивістю (3.62) по підпослідовності

$$u_n(t) \to u(t) \in S(t, \xi) \subset S(t, B_0). \tag{3.65}$$

В силу рівномірного притягнення можемо вибрати $t > 0$ так, щоб

$$dist(S(t, B_0), \Theta) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Тоді з (3.65)

$$z_n \to u(t) \in O_{\frac{\epsilon}{2}}(\Theta),$$

що суперечить (3.63). Теорема доведена.

□

3.4 Застосування до систем типу ODE-PDE

В даному підрозділі загальна схема дослідження робастної стійкості застосовується до змішаної системи, що складається з параболічної системи типу реакції-дифузії та системи звичайних диференціальних рівнянь, що зазнає обмежених збурень.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ - обмежена область. Розглядаємо задачу

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = A \triangle u - f(u) + B(x)v(t) + D(x)d_1(t), \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.66}$$

$$\frac{dv}{dt} = -F(v) + \int_{\Omega} G(x)u(x,t)dx + d_2(t). \tag{3.67}$$

Тут A - $N \times N$ матриця, $\frac{1}{2}(A + A^*) \geq \nu_1 I,\ u = u(x,t) = (u^1, ..., u^N), v = v(t) = (v^1, ..., v^M)$ – невідомі функції, $B, D, G \in L^2(\Omega)$ – задані матриці відповідних розмірностей, $d_1 \in L^\infty(0, +\infty; \mathbb{R}^N), d_2 \in L^\infty(0, +\infty; \mathbb{R}^M)$ – вхідні "збурюючі"сигнали, і для всіх $u, \omega \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{R}^M$ виконуються умови:

$$f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), F \in C^1(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^M),$$

$$\sum_{i=1}^N f^i(u)u^i \geq \nu_2 \cdot \sum_{i=1}^N |u^i|^{p_i} - c_1$$

$$\sum_{i=1}^N |f^i(u)|^{\frac{p_i}{p_i - 1}} \leq c_2(\sum_{i=1}^N |u^i|^{p_i} + 1)$$

$$(Df(u)\omega, \omega)_{\mathbb{R}^N} \geq -c_3 \cdot \|\omega\|^2_{\mathbb{R}^N} \tag{3.68}$$

$$\sum_{i=1}^{M} F^i(y)y^i \geq \nu_3\|y\|^2_{\mathbb{R}^M} - c_4$$

де $\nu_1, \nu_2, \nu_3, c_1, c_2, c_3, c_4$ – задані додатні константи, $p_i \geq 2, i = \overline{1, N}$.

Надалі будемо використовувати позначення:

$$p = (p_1, ..., p_N), q = (q_1, ..., q_N), q_i = \frac{p_i}{p_i - 1}$$

$$L^p(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times ... \times L^{p_N}(\Omega)$$

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^{p_1}(0, T; L^{p_1}(\Omega)) \times ... \times L^{p_N}(0, T; L^{p_N}(\Omega))$$

$$H = (L^2(\Omega))^N, \ V = (H^1_0(\Omega))^N$$

$AC([0, T]; \mathbb{R}^M)$ – простір абсолютно неперервних функцій із $[0, T]$ в $\mathbb{R}^M$.

Відомо [41], що за умов (3.7) задача (3.66),(3.67) для довільних збурень $d = \{d_1, d_2\} \in L^\infty(0, +\infty; \mathbb{R}^N) \times L^\infty(0, +\infty; \mathbb{R}^M)$ та для довільних початкових даних $z_0 = \{u_0, v_0\}$ з фазового простору $X = (L^2(\Omega))^N \times \mathbb{R}^M$ та $\forall T > 0$ має єдиний розв'язок

$$z = \{u, v\} \in (L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega))) \times AC([0, T]; \mathbb{R}^M)$$

Продовжуючи кожен такий розв'язок на $[0, +\infty)$, покладемо

$$S_d(t, z_0) := z(t), \ z(\cdot) - \text{розв'язок } (3.66), (3.67) \text{ зі збуренням } d, \ z(0) = z_0.$$

Ми доведемо, що за відсутності збурень ($d \equiv 0$) напівгрупа S_0 має глобальний атрактор $\Theta \subset X$, тобто існує компактна множина $\Theta \subset X$, яка є інваріантною:

$$S_0(t, \Theta) = \Theta \ \forall t > 0,$$

і рівномірно притягуючою:

$$dist(S_0(t, B), \Theta) \to 0, t \to \infty \text{ для будь-якої обмеженої } B \subset X,$$

де тут і надалі

$$dist(A,B) = \inf_{a\in A}\sup_{b\in B}\|a-b\|_X$$

За наявності збурень S_d вже не є напівгрупою, і виникає питання про те, як залежить відхилення траекторій збуреної системи S_d від множини Θ в залежності від величини

$$\|d\|_\infty := \max\{esssup_{t\geq 0}\|d_1(t)\|_{\mathbb{R}^N}, esssup_{t\geq 0}\|d_2(t)\|_{\mathbb{R}^M}\}.$$

При цьому, відхилення точки $z\in X$ від множини $\Theta\subset X$ будемо оцінювати за допомогою величини:

$$\|z\|_\Theta := \inf_{\theta\in\Theta}\|z-\theta\|_X$$

Ми доведемо, що Θ є стійким в сенсі ISS, тобто

$$\exists\ r>0,\ \exists\ \beta\in\mathcal{KL},\ \exists\ \gamma\in\mathcal{K} \text{ такі, що}$$

$$\forall\ \|z_0\|_\Theta\leq r\ \forall\ \|d\|_\infty\leq r, \forall\ t\geq 0$$

$$\|S_d(t,z_0)\|_\Theta\leq\beta(\|z_0\|_\Theta,t)+\gamma(\|d\|_\infty). \tag{3.69}$$

де класи $\mathcal{K}$, $\mathcal{KL}$ визначені вище.

Теорема 3.7. За умов при $d=0$ *напівгрупа* S_0 *має глобальний атрактор* Θ *в фазовому просторі* X*, який є стійким щодо збурень в сенсі* (3.69).

Доведення. Спочатку доведемо існування глобального атрактору у S_0. Згідно [152] для цього достатньо встановити, що S_0 є дисипативною, неперервною і асимптотично компактною.

Встановимо деякі апріорні оцінки для $z(t)=\{u(t),v(t)\}=S_d(t,z_0)$. Оскільки для $u\in L^2(0,T;V)\cap L^p(0,T;L^p(\Omega))$, $v\in C([0,T];\mathbb{R}^M)$ в силу (3.7)

$$A\triangle u-f(u)+B\cdot v+D\cdot d\in L^2(0,T;V^*)+L^q(0,T;L^q(\Omega))+L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

$$\subset L^2(0,T;V^*) + L^q(0,T;L^q(\Omega)),$$

то згідно [41] $u : [0,T] \mapsto H$ є абсолютно неперервною функцією, і після множення (3.66) на u скалярно в H, (3.67) на v скалярно в $\mathbb{R}^m$ одержуємо: для майже всіх (м.в.) $t > 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + \nu_1\|u(t)\|_V^2 + \nu_2\|u(t)\|_{L^p}^p \leq c_1|\Omega| + \|B\|_{L^2} \cdot \|v(t)\|_{\mathbb{R}^M} + \|D\|_{L^2}, \cdot\|d\|_\infty \tag{3.70}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \nu_3\|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq c_4 + \|G\|_{L^2} \cdot \|u(t)\|_H + \|d\|_\infty. \tag{3.71}$$

З (3.70), (3), нерівності Юнга і нерівності Пуанкаре виводимо, що існують $\nu > 0, c > 0$, що залежать лише від констант задачі та $\|B\|_{L^2}, \|G\|_{L^2}$ такі, що для м.в. $t > 0$

$$\frac{d}{dt}(\|u(t)\|_H^2 + \|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2) + \nu(\|u(t)\|_H^2 + \|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2) \leq c + \|d\|_\infty(1 + \|D\|_{L^2}) \tag{3.72}$$

Звідси, в силу неперервності $z. = \{u(\cdot), v(\cdot)\} : [0, +\infty) \mapsto X$ виводимо:

$$\forall t \geq 0 \ \|z(t)\|_X^2 \leq \|z_0\|_X^2 e^{-\nu t} + \frac{c}{\nu} + \frac{1 + \|D\|_{L^2}}{\nu} \cdot \|d\|_\infty \tag{3.73}$$

З (3.73) при $d = 0$ одержуємо дисипативність S_0.

Тепер розглянемо $z_1 - z_2$, де $z_1 = \{u_1, v_1\}, z_2 = \{u_2, v_2\}$ – розв'язки (3.66), (3.67) при $d_1 = d_2 = 0$. Використовуючи оцінку (3.73) при $d = 0$, одержуємо для кожного розв'язку:

$$\sup_{t\geq 0} \|z(t)\|_x^2 \leq \|z_0\|_X^2 + \frac{c}{\nu} \tag{3.74}$$

Звідси виводимо:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1 - u_2\|_H^2 + \nu_1\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq c_3\|u_1 - u_2\|_H^2 + \|B\|_{L^2}\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}\|u_1 - u_2\|_H$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq \sup_{\|v\|_{\mathbb{R}^M} \leq r_0} \|DF(v)\| \cdot \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \|G\|_{L^2}\|u_1 - u_2\|_H\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M},$$

де $r_0 = \sqrt{max\{\|z_1(0)\|_X^2, \|z_2(0)\|_X^2\} + \frac{c}{\nu}}$.

Отже, з деякою константою $c(r_0) > 0$ одержуємо

$$\forall t \geq 0 \ \|z_1(t) - z_2(t)\|_X^2 \leq e^{c(r_0)t}\|z_1(0) - z_2(0)\|_X. \tag{3.75}$$

З (3.75) випливає неперервність S_0.

Доведемо асимптотичну компактність S_0, тобто предкомпактність послідовності $\{\xi_n = S_0(t_n, z_0^n)\}$, де $t_n \to +\infty$, $\{z_0^n\}$ - обмежена в X.

Оскільки $\{\xi_n = S_0(1, S_0(t_n - 1, z_0^n))\}$, то в силу (3.73) достатньо показати предкомпактність $\{S_0(1, z_0^n)\}$, $\|z_0^n\|_X \leq r$.

Нехай $z_n(t) = \{u_n(t), v_n(t)\} = S_0(t, z_0^n)$, $\|z_0^n\|_X \leq r$.

Обмеженість, а отже предкомпактність $\{v_n(1)\}$ в $\mathbb{R}^M$ випливає з (3.73).

Доведемо, що

$$\|u_n(1)\|_V \leq K(r) \tag{3.76}$$

з деякою константою $K(r)$, яка не залежить від n. Тоді з компактності вкладення $V \subset H$ одержимо предкомпактність $\{u_n(1)\}$ в H.

Виведемо (3.76), слідуючи міркуванням з [61], які обгрунтовуються переходом до гальоркінських апроксимацій задачі (3.66), (3.67). Домножимо (3.66) на $\triangle u_n$ в H. З урахуванням умов (3.7) одержимо нерівність:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_V^2 + \nu_1\|\Delta u_n(t)\|_H^2 \leq$$

$$c_3\|u_n(t)\|_V^2 + \|B\|_{L^2}\|v_n(t)\|_{\mathbb{R}^M}\|\Delta u_n(t)\|_H + \|f(0)\|_{\mathbb{R}^N}\|\Delta u_n(t)\|_H. \tag{3.77}$$

Оскільки

$$\sup_{t\geq 0}\|v_n(t)\|_{\mathbb{R}^M} \leq \sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu}}, \tag{3.78}$$

то з (12) виводимо:

$$\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_V^2 + \lambda\|u_n(t)\|_V^2 \leq c(r)(\|u_n(t)\|_V^2 + 1) \tag{3.79}$$

з деякими додатніми константами λ і $c(r)$.

Після множення (3.79) на $te^{\lambda t}$ маємо:

$$\frac{d}{dt}(t\|u_n(t)\|_V^2 e^{\lambda t}) \leq c(r)(\|u_n(t)\|_V^2 + 1)te^{\lambda t} + \|u_n(t)\|_V^2 e^{\lambda t}.$$

Інтегруючи останню нерівність від 0 до 1, одержуємо:

$$\|u_n(1)\|_V^2 \leq (c(r)+1)\int_0^1 \|u_n(t)\|_V^2 dt + c(r). \tag{3.80}$$

З нерівностей (3.70) і (3.78) одержуємо:

$$\nu_1 \int_0^1 \|u_n(t)\|_V^2 dt \leq \frac{1}{2}r^2 + c_1(\Omega) + \|B\|_{L^2}\sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu}}. \tag{3.81}$$

З (3.80) і (3.81) виводимо оцінку (3.76).

Таким чином, напівргупа S_0 має глобальний атрактор $\Theta \subset X$. Встановимо його робастну стійкість в сенсі (3.69). Для цього перевіримо умови Теореми 3.1. З оцінки (3.74) виводимо властивість i), з $\sigma_1(r) = r, c_0 = \sqrt{\frac{c}{\nu}}$, з (3.75) виводимо ii). Залишилося довести iii). Оскільки властивість (3.69) носить локальний характер, то без обмеження загальності можемо вважати, що $\|d\|_\infty \leq 1$.
Нехай $z_1(t) = \{u_1(t), v_1(t)\} = S_d(t, z_0)$, $z_2(t) = \{u_2(t), v_2(t)\} = S_0(t, z_0)$. Тоді, аналогічно до виводу оцінки (3.75) маємо:

$$\frac{d}{dt}\|z_1 - z_2\|_X^2 \leq 2c_3\|u_1 - u_2\|_H^2 + 2\sup_{\|v\|\leq r}\|DF(v)\|\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}^2 + (\|B\|_{L^2} + \|G\|_{L^2})\|z_1 - z_2\|_X^2 + \tag{3.82}$$

$$+4 \cdot (\|D\|_{L^2} + 1)\|z_1 - z_2\|_X \|d\|_\infty,$$

де r_0 визначається з оцінки

$$\max\{\sup_{t\geq 0}\|v_1(t)\|_{\mathbb{R}^M}, \sup_{t\geq 0}\|v_2(t)\|_{\mathbb{R}^M}\} \leq$$

$$\leq \sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu} + \frac{1 + \|D\|_{L^2}}{\nu} \cdot \|d\|_\infty} \leq \sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu} + \frac{1 + \|D\|_{L^2}}{\nu}} =: r_0$$

Позначимо $\bar{c}(r) = 2c_3 + \|B\|_{L^2} + \|G\|_{L^2} + \sup_{\|v\|_{\mathbb{R}^M} \le r_0} \|DF(v)\|$, $\bar{D} = 4(\|D\|_{L^2} + 1)$. Тоді $\forall T \ge t \ge 0$ маємо

$$\frac{d}{dt}\|z_1 - z_2\|_X^2 \le \bar{c}(r)\|z_1 - z_2\|_X^2 + \bar{D} \sup_{t\in[0,T]} \|z_1(t) - z_2(t)\|_X \cdot \|d\|_\infty.$$

Після інтегрування від 0 до t:

$$\|z_(t) - z_2(t)\|_X^2 \le \bar{c}(r) \int_0^t \|z_1(s) - z_2(s)\|_X^2 ds + \bar{D} \cdot T \cdot \sup_{t\in[0,T]} \|z_(t) - z_2(t)\|_X \cdot \|d\|_\infty.$$

Тоді з Леми Гронуола виводимо:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z_1(s) - z_2(s)\|_X \le \bar{D} \cdot T \cdot e^{\bar{c}(r)T} \cdot \|d\|_\infty,$$

звідки і випливає 3) з $\varphi(r,t) = \bar{D} \cdot t \cdot e^{\bar{c}(r)t}$. Теорема доведена. $\square$

Тепер розглянемо робастну стійкість положення рівноваги для звичаного диференціального рівняння і параболічного рівняння в частинних похідниха, що піддається зовнішнім збуренням через крайові умови параболічного рівняння.

Додатково до вже введених множини функцій порівняння $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ і $\mathcal{KL}$ розглянемо

$$\mathcal{KKL} = \{\beta : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : \text{неперервна із } \beta(\cdot, r, t), \beta(r, \cdot, t) \in \mathcal{K},\ \beta(r, \cdot) \in \mathcal{L}\}.$$

Через $\mathbb{S}^n$ позначимо множину симетричних матриць розмірності n. Для $P, Q \in \mathbb{S}^n$, пишемо $P \succ Q$ тоді і лише тоді, коли $P - Q$ є додатньо визначеною. Для $A \in \mathbb{S}^n$ її найменше і найбільше власне число позначаються через $\lambda_{\min}(A)$ і $\lambda_{\max}(A)$ відповідно.

Розглянемо пов'язану зворотним зв'язком систему рівнянь

$$\begin{aligned} u_t(z,t) &= a^2 u_{zz}(z,t) + f(u(z,t)) + B^{\mathbb{T}}(z)x(t), \\ \dot{x}(t) &= Cx(t) + X(x(t)) + \int_0^l D(z)u(z,t)\,dz, \end{aligned} \tag{3.83}$$

з початковими умовами

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad u(z,0) = \varphi(z), \quad \varphi \in L^2[0,l], \quad z \in (0,l), \quad t \in (0,+\infty) \tag{3.84}$$

і граничними умовами

$$u(0,t) = d_1(t), \quad u(l,t) = d_2(t), \tag{3.85}$$

де $a > 0$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B, D \in L^2([0,l], \mathbb{R}^n)$. Для нелінійних функцій $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $X \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ припускаємо:

1) $f(s)$ може бути записана як $f(s) = f_0(s) + f_1(s)$, $f_0(0) = f_1(0) = 0$, де $f_0(\cdot)$ є глобально Ліпшицевою зі сталою Ліпшиця $L > 0$, тобто

$$|f_0(s_2) - f_0(s_1)| \le L|s_2 - s_1|, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R} \tag{3.86}$$

і $f_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2) $\exists \sigma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ і $q \ge 3/2$ такі, що

$$sf(s) \le \sigma s^2 - \alpha |s|^{2q} \quad \text{для всіх} \quad s \ne 0; \tag{3.87}$$

3) $\exists \zeta > 0$, $c_0 > 0$ такі, що для всіх $s \in \mathbb{R}$ виконується:

$$|f_1'(s)| \le c_0(1 + |s|^{2q-2}), \quad |f_1(s)| \le \zeta |s|^{2q-1} \tag{3.88}$$

4) $X \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ і існує $\delta_2 > 0$ таке, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ виконується

$$\|X(x)\| \le \delta_2 \|x\|^{2q-1}. \tag{3.89}$$

Припускається, що збурення $d_i(t)$, $i = 1,2$ належать класу $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ із $d_i(0) = 0$ і такі, що $\dot{d}_i \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Для задачі (3.83)—(3.85) ми зацікавлені у слабких розв'язках, визначених наступним чином

Означення 3.6. Пара функцій $u \in L^2([0,T], H^1[0,l]) \cap L^{2q}([0,T], L^{2q}[0,l])$ і $x \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$, що задовольняють

$$\int_0^T \langle u_t(\cdot,t), \phi(\cdot,t)\rangle \, dt = \int_0^T (-a^2 \langle u_z(\cdot,t), \phi_z(\cdot,t)\rangle$$
$$+\langle f(u(\cdot,t)) + B^{\mathbb{T}}(\cdot)x(t), \phi(\cdot,t)\rangle) \, dt \tag{3.90}$$
$$\dot{x}(t) = Cx(t) + X(x) + \int_0^l D(z)u(z,t)\, dz,$$

для довільного $\phi \in C_0^\infty([0,T], C_0^\infty[0,l])$ і умови (3.84)—(3.85), називається слабким розв'язком задачі (3.83)—(3.85).

Означення 3.7. Будемо казати, що система (3.83)—(3.85) є ISS-стійкою, якщо існують $\beta_i \in \mathcal{KKL}$, $\gamma_i \in \mathcal{K}$, $i = 1, 2$ такі що для довільного початкового стану і довільного збурення (d_1, d_2) розв'язок задовольняє

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t,\varphi,x_0)\|_{L^2[0,l]} &\le \beta_1(\|\varphi\|_{L^2[0,l]}, \|x_0\|, t) + \gamma_1(d_\infty), \quad t \ge 0 \\ \|x(t,\varphi,x_0)\| &\le \beta_2(\|\varphi\|_{L^2[0,l]}, \|x_0\|, t) + \gamma_2(d_\infty), \quad t \ge 0 \end{aligned} \tag{3.91}$$

де $d_\infty = \max(\|d_1\|_{L^\infty}, \|d_2\|_{L^\infty})$.

Ключову роль у встановленні властивості ISS відіграє наступний результат.

Лема 3.4. Нехай (u, x) *– розв'язок системи* (3.83)*. Тоді*

$$u(z,t) = w(z,t) + v(z,t), \tag{3.92}$$

де $(v, x) \in (L^2([0,T], H_0^1[0,l]) \cap L^{2q}([0,T], L^{2q}[0,l])) \times C([0,T], \mathbb{R}^n)$ *– розв'язок задачі*

$$\begin{aligned} v_t(z,t) &= a^2 v_{zz}(z,t) + f(v(z,t)) + B^{\mathbb{T}}(z)x(t) + g(z,t), \\ \dot{x}(t) &= Cx(t) + X(x(t)) + \int_0^l D(z)v(z,t)\, dz + p(t). \end{aligned} \tag{3.93}$$

з початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad v(z,0) = \varphi(z) \tag{3.94}$$

і граничними умовами

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \tag{3.95}$$

і функції $w(z,t)$, $g(z,t)$ *і* $p(t)$ *задовольняють для майже всіх* $(z,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}_+$ *наступні оцінки:* $|w(z,t)| \le d_\infty$ *і*

$$|g(z,t)| \le \psi_1(\varepsilon)|v(z,t)|^{2q-1} + \psi_0(\varepsilon, d_\infty), \quad \|p(t)\| \le \sqrt{l}\|D\|_{L^2[0,l]} d_\infty, \tag{3.96}$$

де $\varepsilon > 0$ *і*

$$\psi_0(\varepsilon, d_\infty) = c_0 \varepsilon^{1-2q} \frac{1}{2q-1} d_\infty^{2q-1} + (L + c_0) d_\infty + c_0 d_\infty^{2q-1},$$

$$\psi_1(\varepsilon) = c_0 \frac{2q-2}{2q-1} \varepsilon^{(2q-1)/(2q-2)}.$$

Доведення. Підставивши $u(z,t) = w(z,t) + v(z,t)$ в (3.83), отримаємо

$$\begin{aligned} v_t(z,t) &= a^2 v_{zz}(z,t) + B^{\mathbb{T}}(z)x(t) + a^2 w_{zz}(z,t) - w_t(z,t) + f(v(z,t) + w(z,t)), \\ \dot{x}(t) &= Cx(t) + X(x(t)) + \int_0^l D(z)v(z,t)\,dz + \int_0^l D(z)w(z,t)\,dz. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Позначимо $g(z,t) := f(v(z,t) + w(z,t)) - f(v(z,t))$, $p(t) := \int_0^l D(z)w(z,t)\,dz$.

Нехай $w \in H^{1,1}([0,l] \times [0,T])$ – слабкий розв'язок задачі

$$\begin{gathered} w_t(z,t) - a^2 w_{zz}(z,t) = 0, \\ w(0,t) = d_1(t), \quad w(l,t) = d_2(t), \quad w(z,0) = 0, \end{gathered} \tag{3.98}$$

за означенням це означає, що для довільного $\phi \in C_0^\infty([0,l] \times [0,T])$ виконується наступна рівність

$$\int_0^T \langle w_t(\cdot,t), \phi(\cdot,t) \rangle\,dt + a^2 \int_0^T \langle w_z(z,t), \phi_z(z,t) \rangle\,dt = 0. \tag{3.99}$$

В цьому випадку (3.99) виконується також для всіх $\phi \in H_0^{1,1}([0,l] \times [0,T])$.

Зауважимо, що умови $d_i(0) = 0$, $\dot{d}_i \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ гарантують існування слабкого розв'язку $w \in L^2([0,T], H^1[0,l]) \cap L^{2q}([0,T], L^{2q}[0,l])$ задачі (3.98). Дійсно, функція $\tilde{w}(z,t) = w(z,t) - \left(\frac{z}{l} d_2(t) + \frac{l-z}{l} d_1(t)\right)$ є слабким розв'язком задачі

$$\begin{gathered} \tilde{w}_t(z,t) - a^2 \tilde{w_{zz}}(z,t) = \Delta(z,t), \quad \Delta(z,t) = -\frac{z}{l}\dot{d}_2(t) - \frac{l-z}{l}\dot{d}_1(t), \\ \tilde{w}(0,t) = 0, \quad \tilde{w}(l,t) = 0, \quad \tilde{w}(z,0) = 0. \end{gathered} \tag{3.100}$$

Задачі (3.98) і (3.100) є еквівалентними. Тому достатньо показати існування слабкого розв'язку для задачі (3.100). Оскільки $\Delta \in L^2([0,l] \times [0,T])$, то маємо існування єдиного розв'язку $\tilde{w} \in H^{2,1}([0,l] \times [0,T])$ задачі (3.100). За (слабким) принципом максимуму, застосованим до w маємо, що

$$|w(z,t)| \leq d_\infty \quad \text{для майже всіх} \quad (z,t) \in [0,l] \times [0,\infty).$$

Із припущень 1)—2) для f отримаємо оцінку для $g(z,t)$ для майже всіх $(z,t) \in [0,l] \times [0,\infty)$:

$$\begin{aligned} |g(z,t)| &\leq |f_0(v(z,t) + w(z,t)) - f_0(v(z,t))| + |f_1(v(z,t) + w(z,t)) - f_1(v(z,t))| \\ &\leq L|w(z,t)| + |f'(\eta v(z,t) + (1-\eta) w(z,t))||w(z,t)| \\ &\leq L d_\infty + c_0(1 + (\eta|v(z,t)| + (1-\eta)|w(z,t)|)^{2q-2}) d_\infty, \end{aligned}$$

де $\eta \in (0,1)$. Оскільки функція $s \mapsto 1 + s^{2q-2},\ s \geq 0$, є опуклою, то отримаємо

$$\begin{aligned} |g(z,t)| &\leq L d_\infty + c_0(1 + (\eta|v(z,t)| + (1-\eta)|w(z,t)|)^{2q-2}) d_\infty \\ &\leq L d_\infty + c_0(1 + |v(z,t)|^{2q-2} + |w(z,t)|^{2q-2}) d_\infty \\ &\leq c_0 d_\infty |v(z,t)|^{2q-2} + (L + c_0) d_\infty + c_0 d_\infty^{2q-1}. \end{aligned}$$

З нерівності Юнга з $p_1 = (2q-1)/(2q-2)$, $p_2 = 2q-1$ отримаємо

$$d_\infty |v(z,t)|^{2q-2} \leq \frac{2q-2}{2q-1} \varepsilon^{(2q-1)/(2q-2)} |v(z,t)|^{2q-1} + \varepsilon^{1-2q} \frac{1}{2q-1} d_\infty^{2q-1},$$

де $\varepsilon > 0$. Нарешті, отримаємо, що для майже всіх $(z,t) \in [0,l] \times [0,\infty)$ виконується наступне:

$$|g(z,t)| \le c_0 \frac{2q-2}{2q-1} \varepsilon^{(2q-1)/(2q-2)} |v(z,t)|^{2q-1}$$
$$+c_0 \varepsilon^{1-2q} \frac{1}{2q-1} d_\infty^{2q-1} + (L+c_0) d_\infty + c_0 d_\infty^{2q-1} = \psi_1(\varepsilon)|v(z,t)|^{2q-1} + \psi_0(\varepsilon, d_\infty)$$

Для оцінки $p(t)$ скористаємось нерівністю Коші-Буняковського:

$$\|p(t)\| \le \int\limits_0^l \|D(z)\| |w(z,t)|\, dz \le \|D\|_{L^2[0,l]} \|w(\cdot,t)\|_{L^2[0,l]} \le d_\infty \sqrt{l} \|D\|_{L^2[0,l]}.$$

В силу $w \in H^{2,1}([0,l]\times[0,T])$ із (3.97) випливає, що $v \in L^2([0,T], H_0^1[0,l]) \cap L^{2q}([0,T], L^{2q}[0,l])$ – слабкий розв'язок задачі (3.93) із (3.94) і (3.95). Це завершує доведення леми. □

Для оцінки розв'язків задачі (3.93) використовуємо прямий метод Ляпунова. Для цього означимо

$$V(v(\cdot,t),x) := \langle v(\cdot,t), v(\cdot,t)\rangle + 2\langle x^{\mathbb{T}} P_{12}, v(\cdot,t)\rangle + x^{\mathbb{T}} P x, \tag{3.101}$$

де $P_{12} \in (H_0^2([0,l])^n$ – розв'язок крайової задачі

$$a^2 P_{12}''(z) + C^{\mathbb{T}} P_{12}(z) = -B(z) - PD(z), \quad P_{12}(0) = P_{12}(l) = 0, \tag{3.102}$$

і $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ є симетричною додатньо визначеною матрицею.

Візьмемо $\gamma > -1/2\lambda_{\min}(C^{\mathbb{T}} + C)$ і означимо

$$S_\gamma := \frac{1}{2}(C^{\mathbb{T}} + C) + \gamma I, \quad Z_\gamma := \frac{1}{2}(-C^{\mathbb{T}} + C) + \gamma I.$$

Також позначимо

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\|P_{12}\|_{L^2[0,l]} \\ -\|P_{12}\|_{L^2[0,l]} & \lambda_{\min}(P) \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & \|P_{12}\|_{L^2[0,l]} \\ \|P_{12}\|_{L^2[0,l]} & \lambda_{\max}(P) \end{pmatrix}$$

Теорема 3.8. Припустимо, що f і X задовольняють умови 1)–4) і, крім того,

5) для деякого $\gamma > -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(C^{\mathbb{T}} + C)$ і додатньо визначеного P $\det\sin(\frac{1}{a}S_\gamma^{1/2}l) \neq 0$, Π_1 *є додатньо визначеним і для деякого $\delta_1 > 0$*

$$x^{\mathbb{T}}PX(x) \leq -\delta_1\|x\|^{2q}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

6) виконується наступні нерівності

$$\begin{gathered}\omega := 2\Big(\frac{\pi^2 a^2}{l^2} - \|D\|_{L^2[0,l]}\|P_{12}\|_{L^2[0,l]} - \sigma\Big) > 0,\\ \Omega := -\Big(C^{\mathbb{T}}P + PC\\ -\frac{1}{a^2}\int\limits_0^l\int\limits_0^l(\mathcal{P}_{12}(z,\zeta)(B(\zeta) + PD(\zeta))B^{\mathbb{T}}(z)\\ +B(z)(B^{\mathbb{T}}(\zeta) + D^{\mathbb{T}}(\zeta)P)\mathcal{P}_{12}^T(z,\zeta))d\zeta dz\Big) \succ 0,\end{gathered} \tag{3.103}$$

7) матриця

$$\Xi = \begin{pmatrix} \omega & -L\|P_{12}\|_{L^2[0,l]} \\ -L\|P_{12}\|_{L^2[0,l]} & \lambda_{\min}(\Omega) \end{pmatrix}$$

є додатньо визначеною.

8) Нехай існує пара $\tau_1 > \tau_2 > 0$, що задовольняють

$$\frac{\zeta\|P_{12}\|_{L^1[0,l]}}{q}\tau_1^{2q} + \frac{\delta_2\|P_{12}\|_{L^2[0,l]}(2q-1)}{q}\tau_1^{2q/(2q-1)} = 2\delta_1$$

$$\frac{\delta_2\|P_{12}\|_{L^2[0,l]}l^{q-1}}{q}\tau_2^{-2q} + \frac{\zeta(2q-1)\|P_{12}\|_{L^\infty[0,l]}}{q}\tau_2^{-2q/(2q-1)} = 2\alpha$$

Тоді (3.83)–(3.85) *є ISS щодо збурень (d_1, d_2) в сенсі (3.91).*

ВИСНОВКИ

В роботі були досліджені питання стійкості та робастності глобальних атракторів, а також питання побудови ефективних наближених керувань, в нелінійних нескінченновимірних системах, що функціонують під дією збурень. Дослідження проводились в наступних трьох напрямах: були одержані результати щодо наближених оптимальних керувань в системах зі збуреннями в коефіцієнтах; були одержані результати щодо існування та властивостей притягуючих множин та атракторів асимптотично-компактних імпульсних процесів в нескінченновимірних фазових просторах, та одержані застосування до імпульсно-збурених слабо-нелінійних хвильових рівнянь та систем без єдиності; були одержані результати щодо робастної стійкості збурених нескінченновимірних систем, відносно глобальних атракторів відповідних незбурених систем, та одержані застосування до встановлення робастної стійкості дисипативних параболічних та хвильових рівнянь зі збуреннями, а також змішаних систем. Були одержані наступні основні результати:

– для еволюційних керованих систем зі збуреннями в коефіцієнтах обгрунтовано методи побудови наближених оптимальних керувань. Розглянуті задачі керування для еволюційних включень з ліпшицевими та напінеперервними правими частинами, а також задачі наближеного керування та синтезу для нелінійних параболічних рівнянь з коерцитивними цільовими функціоналами. Шляхом переходу до усереднених параметрів одержані теореми про збіжність наближених керувань до оптимальних. Обгрунтовано метод усереднення для знаходження наближеного оптимального керування для еволюційних керованих рівнянь з многозначною ліпшицевою правою частиною на скінченому часовиму проміжку та на півосі за умови існування середнього значення в метриці Хаусдорфа. Цей метод суттєво модифіковано і застосовано до еволюційного включення з напінеперервною правою частиною, для якої не існує класичного середнього значення. Шляхом переходу до усереднених параметрів розв'язана задача наближеного керування для нелінійного рівняння типу реакція-дифузія з коерцитивними цільовим функціоналом. Обгрунтовано наближений синтез, тобто керування в формі оберненого зв'язку для нелінійно-збуреного еволюційного рівняння параболічного типу.

– одержано результати щодо якісної поведінки нескінченновимірних систем, що функціонують під дією імпульсних та випадкових збурень. Одержано нові ефективні достатні умови для властивості асимптотичної компактності імпульсного процесу в нескінченновимірному фазовому просторі, яка може бути перевірена, виходячи лише з властивостей неперервної напівгрупи і властивостей імпульсного відображення. Це дозволило встановити нові результати щодо існування та властивостей рівномірних притягуючих множин в системах з імпульсною дією. Одержані результати дозволили довести існування рівномірного атрактору для імпульсно-збуреного хвильового рівняння та імпульсно-збуреної системи рівнянь типу реакції-дифузії без єдиності. Також досліджено асимптотичну поведінку систем типу реакція-дифузія з нелокальним диференціальним оператором та стохастичними збуреннями, доведено існування інваріантних мір та збіжності до стаціонарних станів у випадку малих збурень.

– одержано результати щодо робастної стійкості глобальних атракторів нескінченновимірних систем відносно збурень. Описано та обгрунтовано загальний підхід до робастної стійкості глобальних атракторів компактних та асимптотично компактних збурених еволюціййних систем в рамках теорії стійкості від входу до стану (ISS). Доведено властивості локальної стійкості від входу до стану (LISS) для глобального атрактору нелінійного хвильового рівняння з дисипацією. Доведено властивість асимптотичного підсилення (AG) по відношенню до зовнішніх збурень для дисипативної параболічної системи типу реакція-дифузія без єдиності. Доведено властивість ISS для атрактору змішаної системи PDE-ODE, що складається з параболічної системи типу реакції-дифузії та системи звичайних диференціальних рівнянь, що зазнають адитивних обмежених збурень, та збурень через границю області.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. *Благодатских В. И.* Дифференциальные включения и оптимальное управление / В. И. Благодатских, А. Ф. Филлипов // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы, Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР. – 1985. – Т. 169. – С. 194-252.

2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М. Наука, 1963

3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. - К. Наукова думка, 1969

4. *Капустян О.А., Сукретна А.В.* Наближений усереднений синтез в задачі оптимального керування для параболічного рівняння // Український математичний журнал – 2004. – Vol. 56. – №10. – С. 1653–1664.

5. *Кічмаренко О. Д.* Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для звичайних диференціальних рівнянь на півосі. // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 5. — С. 642-654.

6. *Кічмаренко О.Д., Касімова Н.В., Жук Т.Ю.* Наближений розв'язок задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами // Дослідження в математиці і механіці. — 2021. — Т.26, №1. (in print)

7. *Кічмаренко О.Д, Капустян О.А., Касімова Н.В., Жук Т.Ю.* Задача опти-

мального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами на півосі // Нелінійні коливання (подано до друку)

8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972.

9. *Носенко Т. В.* Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування. // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 512-519.

10. *Перестюк Н. А.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н.В. Скрипник. – Киев:Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.

11. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев-Одесса:Лыбидь, 1992

12. *Плотников В. А., Плотников А.В., Витюк А.Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса:Астропринт, 1999

13. *Плотников В. А.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса:Астропринт, 1999. – 356 с.

14. *Плотников В. А.* Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова // Укр. мат. журнал. – 1995. – Т.47. №11. – С. 1526-1532.

15. *Самойленко А.М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. - К. : Вища школа, 1987. - 287с.

16. *Филлипов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. МГУ.— 1967. — №3. — С. 16-26.

17. *Филлипов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филлипов. – Москва:Наука, 1985. – 222 с.

18. *Akhmet M.* Principles of Discontinuous Dynamical Systems. – Springer, New York, 2010.

19. *Akhmet M.* Principles of Discontinuous Dynamical Systems / M. Akhmet. - New York: Springer, 2010. - 176p. DOI 10.1007/978-1-4419-6581-3

20. *R. Aliev and A. Panfilov* A simple two-variable model of cardiac excitation // Chaos, Solitons and Fractals, 7(3):293–301, 1996.

21. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analisys. – Birkhausser, Boston, 1990.

22. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions / R. J. Aumann // J. Math. Anal. Appl. 1965. – Vol.12, No 1. – P. 1–12.

23. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions. // J. Math. Anal. Appl. — 1965. — Vol. 12, Issue 5. — P. 1-12.

24. *Ball J.M.* Continuity properties and attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations / J. M. Ball // Journal of Nonlinear Science. – 1997. – Vol. 7.– No.5. – P. 475–502.

25. *Ball J. M.* Global attractors for damped semilinear wave equations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. - 2004. - vol.10. - P. 31-52.

26. *Bonotto E.M., Federson M.* Limit sets and the Poincar?-Bendixson Theorem in impulsive semidynamical systems // J. Differential Equations 244 (2008) 2334-2349

27. *Bonotto E. M.* Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol.332. – P. 81–96.

28. *Bonotto E. M., Demuner D. P.* Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems // Bull. Sci. Math. – 2013. – Vol. 137. – P. 617–642.

29. *Bonotto E. M., Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R.* Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach // J. Diff. Eqn. – 2015. – Vol. 259. – P. 2602–2625.

30. *Bonotto E. M., Bortolan M. C., Collegary R., Czaja R.* Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems // J. Diff. Eqn. – 2016. – Vol. 261. – P. 4358–4367

31. *Bonotto E. M., Kalita P.* On attractors of generalized semiflows with impulses // J. Geometric Anal. – 2019 DOI: 10.1007/s12220-019-00143-0

32. *Bonotto E.M.* Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems / E.M. Bonotto // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2007. - Vol.332, p. 81-96. doi:10.1016/j.jmaa.2006.09.076

33. *Bonotto E.M.* Global attractors for impulsive dynamical systems - a precompact approach/ E.M.Bonotto, M.C.Bortolan, A.N.Carvalho, R.Czaja // Journal of Differential Equations. - 2015. - Vol. 259, Iss. 7, p 2602-2625 https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.03.033

34. *Bonotto E.M.* Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems / E.M.Bonotto, M.C.Bortolan, R.Collegari, R.Czaja // Journal of Differential Equations. - 2016. - Vol. 261, Iss. 8, p. 4338-4367 https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.06.024

35. J.M. Ball. Global attractors for damped semilinear wave equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 10(2004):31-52.

36. *Caraballo T., Marin-Rubio P., J. Robinson* A comparison between two theories for multivalued semiflows and their asymptotic behavior // Set-valued analysis. - 2003. - vol. 11. - P. 297-322.

37. *Carvalho A. N., Gentile C.* Asymptotic behaviour of nonlinear parabolic equations with monotone principal part // J. Math. Anal. Appl. - 2003. - vol. 280. - P. 252-272.

38. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors of equations of mathematical physics. – AMS, 2002.

39. *V.V. Chepyzhov.* Attractors for equations of mathematical physics // American Mathematical Society. – 2002.

40. *V.V. Chepyzhov, M.I. Vishik* (2002) *Attractors for equations of mathematical physics*. American Mathematical Society.

41. *V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik*, Attractors for Equations of Mathematical Physics, American Mathematical Society, 2002.

42. *Ciesielski K.* On stability in impulsive dynamical systems // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2004. – Vol.52. – P. 81–91.

43. *Ciesielski K.* On Stability in Impulsive Dynamical Systems / K. Ciesielski// Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics. - 2004. - Vol. 84 N 1, p. 81-91 DOI:10.4064/ba52-1-9

44. *Dashkovskiy S., Kosmykov M.* Input-to-state stability of interconnected hybrid systems // Automatica – 2013. – **49**(4). – P. 1068–1074.

45. *Dashkovskiy S., Mironchenko A.* Input-to-state stability of nonlinear impulsive systems // SIAM J. Control Optim. – 2013. – **51**(3). – P. 1962–1987.

46. *Dashkovskiy S., Feketa P.* Asymptotic properties of Zeno solutions // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. – 2018. – Vol. 30, P. 256-265

47. *Dashkovskiy S., Kapustyan O. V., Romaniuk. I.V.* Global atractors of impulsive parabolic inclusions // Descrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B. – 2017. – Vol.22(5) – P. 1875–1886.

48. *Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O. V., Romaniuk. I.V.* Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems // *J. Math. Anal. Appl.*, **458**(1) (2018), 193-218.

49. *Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O. V., Romaniuk. I.V.* Existence and invariance of global attractors for impulsive parabolic system without uniqueness // Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. - 2019. P.57-78

50. *Dashkovskiy S.* Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems / S.Dashkovskiy, P.Feketa, O. Kapustyan, I. Romaniuk // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2018. - Vol. 458, Iss. 1, p. 193-218 https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.09.001

51. S. Dashkovskiy, and A. Mironchenko. Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Math. Contr. Sign. Syst.*, 25:1-35, 2013.

52. S. Dashkovskiy, O.V. Kapustyan, I. Romaniuk. Global attractors of impulsive parabolic inclusions. *Discr. Contin. Dyn. Syst. - Series B*, 22:1875-1886, 2017.

53. S. Dashkovskiy, O.V. Kapustyan, J. Schmid. A local input-to-state stability

result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations. *Mathematics of Control, Signals, and Systems* , 32:309-326, 2020.

54. *S. Dashkovskiy.* Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems // Math. Contr. Sygn. Syst. – 2013. - 25. – P. 1–35.

55. *S. Dashkovskiy.* Global attractors of impulsive parabolic inclusions // Discr. Contin. Dyn. Syst. – 2017. – Series B, 22. – P. 1875–1886.

56. *S. Dashkovskiy.* A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations // Mathematics of Control, Signals, and Systems. – 2020. – 32. – P. 309–326.

57. *S. Dashkovskiy, and A. Mironchenko* (2013) Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Math. Contr. Sygn. Syst.*, 25 p. ,1–35.

58. *S. Dashkovskiy, O.V. Kapustyan, I. Romaniuk* (2017) Global attractors of impulsive parabolic inclusions, *Discr. Contin. Dyn. Syst. - Series B*, 22 p. 1875–1886.

59. *S. Dashkovskiy, O.V. Kapustyan, J. Schmid* (2020) A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 32 p. 309–326.

60. *S. Dashkovskiy and A. Mironchenko*, Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems, *Math. Contr. Sign. Syst.*, **25** (2013), 1-35.

61. *S. Dashkovskiy, O. Kapustyan and J. Schmid*, A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations, Mathematics of control, Signals, and Systems, **32** (2020), 309-326.

62. *Dawidiwski M.* On some generalization of Bogolubov averaging theorem / M. Dawidiwski // Funct. et. Approx. (PRL). – 1979. – No7. – P. 55 –70.

63. *Feketa P, Perestyuk Yu.* Perturbation theorems for a multifrequency system with pulses // J. Math. Sci. (N.Y.) – 2016. – **217**(4). – P. 515–524.

64. *R. FitzHugh* Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane // Bull. Math. Biophysics, 17:257–278, 1955.

65. *Y. Giga and N. Kajiwara* On a resolvent estimate for bidomain operators and its applications // J. Math. Anal. Appl., 459(1):528–555, 2018.

66. *Gorban, N.V., Kasyanov, P.O.* On regularity of all weak solutions and their attractors for reaction-diffusion inclusion in unbounded domain // Solid Mechanics and its Applications. - 2014, vol. 211. - P. 205-220

67. *Gorban, N.V., Kapustyan, A.V., Kapustyan, E.A., Khomenko, O.V.* Strong global attractor for the three-dimensional Navier-Stokes system of equations in unbounded domain of channel type // Journal of Automation and Information Sciences. - 2015. - vol. 47, No.11. - P. 48-59

68. *R. Goebel, R. Sanfelice, and A. R. Teel.* Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness.// Princeton University Press, 2012.

69. *Gorban N., Paliichuk L.* Uniform Global Attractor for Nonautonomous Reaction-Diffusion Equations with Caratheodory's Nonlinearity // Advances in Dynamical Systems and Control. Springer Series: Studies in Systems, Decision and Control. - 2016. - Vol. 69. - P. 265-272. DOI: 10.1007/978-3-319-40673-2 13

70. *Gorban N.V.* Long-time behavior of state functions for climate energy balance model / N.V. Gorban, O.V. Khomenko, L.S. Paliichuk, A.M. Tkachuk//Discrete

and Continuous Dynamical Systems. Ser.B. - 2017. -Vol. 22, Iss. 5, P. 1887-1897, DOI: 10.3934/dcdsb.2017112

71. *Gorban N.* Uniform attractors for vanishing viscosity approximations of non-autonomous complex flows / N. V. Gorban, O. V. Kapustyan, P. O. Kasyanov et. al. // JODEA. - 2018. - Vol. 26, Iss. 2. - P. 1-12. - DOI: 10.15421/141807

72. N.V. Gorban, O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, L.S. Paliichuk. On global attractors for autonomous damped wave equation with discontinuous nonlinearity. *Solid Mechanics and its Applications*, 211:221-237, 2014.

73. *N. V. Gorban, A. V. Kapustyan, E. A. Kapustyan, O. V. Khomenko*, Strong global attractors for the three-dimensional Navier-Stokes system of equations in unbounded domain of channel type // Journal of Automation and Information Sciences, 47(11), 2015, 48-59

74. B. Jacob, F. Schwenninger. Input-to-state stability of unbounded bilinear control systems. *arXiv:1811.08470*, 2018.

75. *B. Jacob.* Input-to-state stability of unbounded bilinear control systems // arXiv:1811.08470. – 2018.

76. *B. Jacob, F. Schwenninger* (2018) Input-to-state stability of unbounded bilinear control systems. *arXiv:1811.08470.*

77. *Izhkevich E.M.* Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. – The MIT Press, Cambridge, 2007.

78. *Kalita P., Lukaszewich G.* Global attractors for multivalued semiflows with weak continuity properties // Nonlinear Analysis Series A, Theory, Methods and Applications. – 2014. – No.101. – P. 124–143.

79. L.V. Kapitanski, I.N. Kostin. Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations. *Algebra i Analiz*, 2(1):114-140, 1990.

80. *Kapustyan V.O., Kapustyan O.A., Mazur O.K.* Problem of optimal control for the poisson equation with nonlocal boundary conditions // Journal of Math. Sciences (United States), 201(3):. — 2014. — Vol.201(3). — P.325-334.

81. *Kapustyan O.V., Kapustyan O.A., Sukretna A.V.* Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem // Ukrainian Mathematical Journal. —2011. — Vol.63(5). — P.759-767.

82. *Kapustyan O.V., Kapustian O.A., Sukretna A.V* Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem // Ukrainian Math. J. – 2011. – Vol.63., № 5. – P. 759–767.

83. *Kapustyan, A.V.* Global attractors of a nonautonomous reaction-diffusion equation // Differential Equations. - 2002. - vol. 38, No. 10. - P. 1467-1471

84. *Kapustyan, O.V., Shkundin, D.V.* Global attractor of one nonlinear parabolic equation // Ukrainian Mathematical Journal. - 2003. - vol. 55, No. 4. - P. 446-455

85. *Kapustyan, O.V., Kasyanov, P.O., Valero, J.* Structure of the global attractor for weak solutions of a reaction-diffusion equation // Applied Mathematics and Information Sciences. - 2015. vol. 9, No.5. - P. 2257-2264

86. *Perestyuk M. O., Kapustyan O. V.* Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems // Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. – Vol.68(4). – P. 517–528.

87. *Kapustyan O. V., Perestyuk M.O., Romanyuk. I.V.* Stability of global

attractors of impulsive infinite-dimensional systems // Ukrainian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 70, No. 1. – P. 30-41

88. *Kapustyan O.V., Kasyanov P.O., Valero J.* Pullback attractors for a class of extremal solutions of the 3D Navier-Stokes equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2011. - Volume 373, Issue 2. - P. 535-547. - DOI: 10.1016/j.jmaa.2010.07.040.

89. *Kapustyan O.V, Kasyanov P.O., Valero J.* Structure and regularity of the global attractor of a reaction-diffusion equation with non-smooth nonlinear term // Discrete and Continuous Dynamical Systems. - 2014. - Volume 34, Number 10. - P. 4155-4182. - DOI: 10.3934/dcds.2014.34.4155.

90. *Kapustyan O.V., Kasyanov P.O., Valero J.* Regular Solutions and Global Attractors for Reaction-Diffusion Systems without Uniqueness // Communications on Pure and Applied Analysis. - 2014. - Volume 13, Number 5. - P. 1891-1906. - DOI: 10.3934/cpaa.2014.13.1891.

91. *Kapustyan O.V, Kasyanov P.O., Valero J.* Structure of the Global Attractor for Weak Solutions of a Reaction-Diffusion Equation // Applied Mathematics and Information Sciences. - 2015. - Vol. 9, No. 5. - P. 2257-2264. - http://dx.doi.org/10.12785/amis/090506.

92. *Kapustyan O.V.* Stability of Global Attractors of Impulsive Infinite-Dimensional Systems / O. V. Kapustyan, M. O. Perestyuk, I. V. Romanyuk // Ukrainian Mathematical Journal. - 2018. - vol. 70, p.30-41

93. A.V. Kapustyan, V.S. Melnik, J. Valero. Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 13:1969-1983, 2003.

94. A.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, J. Valero. Structure of the global attractor for weak solutions of a reaction-diffusion equation. *Appl. Math. Inform. Sciences*, 9:2257-2264, 2015.

95. *O.V. Kapustyan.* Structure of uniform global attractor for general non-autonomous reaction-diffusion system // Continuous and distributed systems. – 2014 – Vol. 211. – P. 221–237.

96. *O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, J. Valero, M.Z. Zgurovsky* (2014) Structure of uniform global attractor for general non-autonomous reaction-diffusion system. *Continuous and distributed systems*. vol. 211, p. 221–237.

97. *O. V. Kapustyan, P. O. Kasyanov, J. Valero*, Structure of the global attractor for weak solutions of a reaction-diffusion equation // Appl. Math. Inf. Sci., **9** (2015), 2257-2264.

98. I. Karafyllis, M. Krstic. ISS with respect to boundary disturbances for 1-D parabolic PDEs. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 61:3712–3724, 2016.

99. I. Karafyllis, M. Krstic. ISS in different norms for 1-D parabolic PDEs with boundary disturbances. *SIAM J. Contr. Optim.*, 55:1716–1751, 2017.

100. Karafyllis, I. and Krstic, M. (2019). *Input-to-state stability for PDEs.* Communications and Control Engineering Series. Springer, Cham.

101. *Karafyllis, I.* Input-to-state stability for PDEs // Communications and Control Engineering Series. – Springer, Cham. – 2019.

102. *Karafyllis, I. and Krstic, M.* (2019) *Input-to-state stability for PDEs.* Communications and Control Engineering Series. Springer, Cham.

103. *Kasyanov P.O.* Multivalued dynamics of solutions of autonomous differential-operator inclusion with pseudomonotone nonlinearity // Cybernet. Systems Anal., 2011, **47** (5), 800–811.

104. *P. O. Kasianov, L. Toscano, N. V. Zadoianchuk*, Long-time behavior of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional reaction-displacement law // Abstract and Applied Analisys

105. *Kaul S.K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems/ S.K, Kaul// Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. - 1994. - Vol.7, N 4, p. 509-523 https://doi.org/10.1155/S1048953394000390

106. *Kichmarenko O. D.* Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 115, Issue 1. — P. 93-114.

107. *Kichmarenko O. D.* Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 115, Issue 1. — P. 93-114.

108. *Kichmarenko O.D, Stanzhytskyi O.M.* Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2018. — Vol.18(2). — P.196-211.

109. *Kichmarenko O. D.* Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters / O. D. Kichmarenko // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – Vol.115, No 1. – P. 93 – 114.

110. *Kichmarenko O., Stanzhytskyi O.* Optimal control problems for some classes

of functional-differential equations on the semi-axis // Miskolc Math. Notes. – 2019. – №2. – P. 1021-1037.

111. *Kloeden P. E., Valero J.* Attractors of weakly asymptotically compact set-valued dynamical systems // Set-Valued Analysis. – 2005. – Vol. 13. – P. 381–404.

112. *Lavrova O., Mogylova V., Stanzhytskyi O., Misiats O.* Approximation of the optimal control problem on an interval with a family of optimization problems on time scales // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2017. — Vol.17(3). — P. 303-314.

113. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equitations. – Singapore : World Scientific, 1989.

114. *Lakshmikantham V.* Theory of Impulsive Differential Equations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P.S. Simeonov - Singapore: World Scientific, 1989. - 288p. https://doi.org/10.1142/0906

115. *Melnik V. S., Valero J.* On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Analysis. – 1998. – No.6. – P. 83–111.

bibitem[Mironchenko et al.(2016)Mironchenko, Ito]MiIt:16 A. Mironchenko, H. Ito. Characterizations of integral input-to-state stability for bilinear systems in infinite dimensions. *Math. Contr. Rel. Fields*, 6:447-466, 2016

116. A. Mironchenko, Ch. Prieur Input-to-State Stability of Infinite-Dimensional Systems: Recent Results and Open Questions. *SIAM Review*, 62: 529-614, 2020

117. A. Mironchenko, F. Wirth. Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 63:1692-1707, 2018.

118. A. Mironchenko, I. Karafyllis, M. Krstic. Monotonicity methods for input-to-state stability of nonlinear parabolic PDEs with boundary disturbances. *SIAM J. Contr. Optim.*, 57:510-532, 2019.

119. A. Mironchenko. Criteria for input-to-state practical stability. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 64:298-304, 2019.

120. *A. Mironchenko.* Input-to-state Stability of Infinite-Dimensional Systems: Recent Results and Open Questions // SIAM Review. – 2020. – 62. – P. 529–614.

121. *A. Mironchenko.* Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems // IEEE Trans. Autom. Contr. – 2018. – 63. – P. 1692–1707.

122. *A. Mironchenko, Ch. Prieur* (2020) Input-to-state Stability of Infinite-Dimensional Systems: Recent Results and Open Questions. *SIAM Review.*, 62, p. 529–614.

123. *A. Mironchenko, F. Wirth* (2018) Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 63, p. 1692–1707.

124. *A. Mironchenko and F. Wirth*, Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **63** (2018), 1602-1617.

125. *A. Mironchenko and Ch. Prieur*, Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: Recent results and open questions, *SIAM Review*, **62** (2020), 529-614.

126. *O. Misiats, O. Stanzhytskyi, and N. Yip.* Asymptotic analysis and homogenization of invariant measures // Stoch. Dyn., 19(2):1950015, 27, 2019.

127. *O. Misiats, O. Stanzhytskyi, and N. Yip.* Invariant measures for stochastic reactiondiffusion equations with weakly dissipative nonlinearities // Stochasti-

cs. An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 92(8):1197–1222, 2020.

128. *Nakonechnyi O.G., Kapustian O.A., Chikrii, A.O.* Approximate Guaranteed Mean Square Estimates of Functionals on Solutions of Parabolic Problems with Fast Oscillating Coefficients Under Nonlinear Observations // Cybernetics and Systems Analysis. — 2019. — Vol.55(5). — P.785-795.

129. *Nosenko T.V., Stanzhyts'kyi O.M.* Averaging method in some problems of optimal control // Nonlinear Oscillations. — 2008. — Vol.11(4). — P.539-547.

130. *Perestyuk M.O.* Global Attractors in Impulsive Infinite-Dimensional Systems / O. V. Kapustyan, M. O. Perestyuk// Ukrainian Mathematical Journal. - 2016. - vol. 68, p. 583-597 https://doi.org/10.1007/s11253-016-1243-0

131. *Robinson J.C.* Infinite-dimensional dynamical systems. – Cambridge University Press, 2001.

132. J.C. Robinson. *Infinite-dimensional dyanamical systems.* Cambridge University Press, 2001.

133. *J. C. Robinson*, Infinite-Dimensional Dynamical Systems, Cambridge University Press, 2001

134. *J. Rogers and A. McCulloch* A collocation-galerkin finite element model of cardiac action potential propagation // IEEE Trans. Biomed. Engrg., 41:743–757, 1994.

135. *Stanzhyts'kyi O.M.* Investigation of exponential dichotomy of ito stochastic systems by using quadratic forms // Ukrainian Mathematical Journal. — 2001. — Vol.53(11). — P.1882-1894.

136. *Samoĭlenko A. M., Stanzhitskiĭ A. N.* On averaging differential equations on an infinite interval // Differ. Uravn. – 2006, vol.42, №4, P. 476–482

137. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equitations. – Singapore : World Scientific, 1995.

138. *Samoilenko A.M.* Impulsive differential equations / A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk. - Singapore: World Scientific, 1995. - 462p.

139. *Sanders J. A., Verhulst F.* Averaging methods in nonlinear dynamical systems. - N.Y.: Springer, 1985

140. J. Schmid, H. Zwart. Stabilization of port-Hamiltonian systems by nonlinear boundary control in the presence of disturbances. *arXiv:1804.10598*, 2018. (Accepted provisionally in ESAIM Contr. Optim. Calc. Var.)

141. J. Schmid. (2019) Weak input-to-state stability: characterizations and counterexamples. *Math. Contr. Sign. Syst.*

142. *Simsen J., Gentile C.* On attractors for multivalued semigroups defined by generalized semiflows // Set-Valued Analysis. – 2008. – Vol. 16. – P. 105–124.

143. Sontag, E.D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Control*, 34(4), 435–443.

144. E.D. Sontag, Y. Wang. New characterizations of input-to-state stability. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 24:1283-1294, 1996.

145. *E. D. Sontag*, Mathematical control theory: deterministic finite-dimensional systems, Springer, 1998.

146. *E. D. Sontag*, Smooth stabilization implies coprime factorization, *IEEE Trans. Automat. Control*, **34** (1989), 435-443.

147. *J. Schmid*, Weak input-to-state stability: Characterization and counterexamples, *Math. Contr. Sign. Syst.*, **31** (2019), 433-454.

148. *J. Schmid, V. Kapustyan and S. Dashkovskiy*, Asymptotic gain results for attractors of semilinear systems, arXiv:1909.06302, (2020). (Accepted provisionally in Mathematical Control & Related Fields).

149. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1988. – 500 p.

150. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics / R. Temam. - Springer, 1988. - 500p. https://doi.org/10.11540/bjsiam.1.4 350

151. R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Springer, 2nd edition, 1998.

152. *R. Temam*, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer, 2nd edition, 1997.

153. *L. Tung* A bi-domain model for describing ischemic myocardial d-c potentials. Ph.D. thesis, MIT, Cambridge, 1978.

154. J. Valero, A.V. Kapustyan. On the connectedness and asymptotic behaviour of solutions of reaction-diffusion equations. *J. Math. Anal. Appl.* 323:614-633, 2006.

155. *Wazewski T.* Systemes de comande et equations au contingent // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys. — 1961. — 9, Issue 3. — P. 151-155.

156. *Wazewski T.* Sur une condition equvalente l'equation an contingent // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys. — 1961. — 9, Issue 12. — P. 865-867.

157. *Zadoyanchuk N.V., Kas'yanov P.O.* Faedo-galerkin method for second-order evolution inclusions with w-pseudomonotone mappings // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — Vol.61(2). — P.236-258.

158. *Zgurovsky M.Z., Kasyanov P.O., Zadoianchuk N.V.* Long-time behavior of solutions for quasilinear hyperbolic hemivariational inequalities with application to piezoelectricity problem // Applied Mathematics Letters. - 2012. - Volume 25, Issue 10. - P.1569-1574. - DOI: 10.1016/j.aml.2012.01.016.

159. *Zgurovsky M.* Uniform global attractors for non-autonomous dissipative dynamical systems / M. Zgurovsky, , M. Gluzman, N. Gorban, P. Kasyanov, L. Paliichuk, O. Khomenko// Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser.B. - 2017. -Vol. 22, Iss. 5, P. 2053-2065, DOI: 10.3934/dcdsb.2017120

160. *Zgurovsky M.Z.* Qualitative and quantitative analysis of weak solutions of energy-balance climate models / M.Z. Zgurovsky, P.O. Kasyanov, N.V. Gorban, L.S. Paliichuk// Cybernetics and Systems Analysis. - vol. 55, N 4, p. 552-560 https://doi.org/10.1007/s10559-019-00164-1

ДОДАТОК А. НАУКОВІ ПУБЛІКАЦІЇ

Основні роботи за тематикою проекту з 2019 року по 2021 рік (до звітного періоду)

1) Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O., Romaniuk I. Existence and invariance of global attractors for impulsive parabolic system without uniqueness // Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems (Book Chapter, Scopus) - 2019. P.57-78

2) Kapustyan O., Romaniuk I. Global attractors of an impulsive dynamical system generated by the wave equation // Journal of Mathematical Sciences (Q3) - 2019, vol.236, № 3, P. 300-311

3) Asrorov F., Kapustyan O., Perestyuk Yu. On the exponential stability of a trivial torus for one class of nonlinear impulsive systems // Journal of Mathematical Sciences (Q3) - 2019, vol.238, № 3, P. 263-270

4) Dashkovskiy S., Kapustyan O., Schmid J. A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations // Mathematics of Control, Signals, and Systems (Q2) - 2020, vol. 32, № 3, P. 309-326

5) Dashkovskiy S., Kapustyan O., Perestyuk Yu. Stability of uniformly attracting sets for impulsive-perturbed multi-valued semiflows // IFAC Papers Online (Q3) - 2020, vol. 53, № 2, P.3180-3185

6) Dashkovskiy S., Kapustyan O., Schmid J. Input-to-state stability results w.r.t. global attractors of reaction-diffusion equations // IFAC Papers Online (Q3) - 2020, vol. 53, № 2, P.3186-3191

7) Dashkovskiy S., Kapustyan O., Perestyuk Yu. Stability of uniform attractors of impulsive multi-valued semiflows // Nonlinear Analysis: Hybrid systems (Q1) -

2021, vol.40

8) Kapustyan O.V., Asrorov F.A., Sobchuk V.V. Uniform attractor for an N-dimensional parabolic system with impulsive perturbation // Journal of Mathematical Sciences (Q3) - 2021, vol. 254, №2, P. 219-228

9) Schmid J., Kapustyan O., Dashkovskiy S. Asymptotic gain results for attractors of semilinear systems // Mathematical Control and Related Field (Q2) - 2021 (published online).

Основні публікації по проєкту за звітний період

Монографії:

Капустян О.В., Перестюк Ю.М. Якісна теорія розривних динамічних систем. - Київ: ВПЦ Київський університет, 2021 (підписана до друку 28.10.2021), 182 с.

Статті

1) Кічмаренко О.Д., Касімова Н.В., Жук Т.Ю. "Наближений розв'язок задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами"// Дослідження в математиці і механіці, 2021, т.26, №1, С. 39-55

http://rmm-journal.onu.edu.ua/

Жук Т.Ю. належить доведення основного результату (Теорема 4) про близькість усередненого керування до оптимального керування збуреної задачі на скінченому проміжку.

2) Кічмаренко О.Д., Капустян О.А., Касімова Н.В., Жук Т.Ю. "Задача оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами на півосі"// Нелінійні коливання (категорія А) (прийнята до друку)

Капустян О.А. та Жук Т.Ю. належить доведення основного результату (Теорема 1) про близькість усередненого керування до оптимального керування збуреної задачі на півосі.

3) Sergey Dashkovskiy, Oleksiy Kapustyan, Olena Kapustyan, Tetyana Zhuk "Asymptotic analysis of optimal control problems on the semi-axes for Caratheodory differential inclusions with fast oscillating coefficients"// Set-Valued and Variational

Analisys (Q1) (подано до друку)

S. Dashkovskiy є співкерівником проекту, йому належать участь у постановках задач та в обговоренні шляхів доведення одержаних результатів.

4) Капустян О.В., Станжицький О.М., Фартушний І.Д. Метод усереднення в задачі оптимального керування для збуреного параболічного рівняння // Український математичний журнал (категорія А) (подано до друку)

Капустяну О.В. та Станжицькому О.М. належить постановка задачі та доведення основного результату про близькість критеріїв якості на наближеному та точному керуванні.

5) Горбань Н.В., Капустян О.А., Капустян О.В. Наближений оптимальний регулятор для слабо нелінійного еволюційного рівняння параболічного типу // Кібернетика і системний аналіз (Q3), 2021, т.57, №6, С. 46-52

http://www.kibernetika.org/volumes/2021/VolumeContentUA.html

Капустяну О.В. та Капустян О.А. належить постановка задачі та доведення основного результату (Теорема 2) про близькість значень критеріїв якості збуреної та незбуреної задач.

6) Valentyn Sobchuk, Oleksiy Kapustyan, Volodymyr Pichkur and Olena Kapustian "Design of stable periodic regimes for one class of hybrid planar systems"// CEUR Workshop Proceedings (Scopus conference paper) - 2021, vol.3018, P. 111-120

http://ceur-ws.org/Vol-3018/

Капустяну О.В та Капустян О.А. належить постановка задачі та участь в доведенні основного результату (Теорема 4) про існування імпульсного циклу.

7) S. Dashkovskiy, O.A. Kapustian, O.V. Kapustyan, N.V. Gorban "Attractors for multivalued impulsive systems: existence and applications to reaction-diffusion system"// Mathematical Problems in Engineering (Q3), 2021, Article ID 7385450

https://www.hindawi.com/journals/mpe/2021/7385450/

Капустяну О.В. та Капустян О.А. належить обгрунтування існування атрактору у імпульсного напівпотоку, породженого імпульсно-збуреною системою реакція-дифузія (Теорема 1).

8) Капустян О.В., Горбань Н.В. "Притягуючі множини для одного класу асимптотично компактних систем з імпульсним збуренням"// Системні дослідження та інформаційні технології (категорія А), 2021, №2, С.140-148

http://journal.iasa.kpi.ua/issue/view/14469

Капустяну О.В. належить обгрунтування існування атрактору у асимптотично-компактного імпульсного напівпотоку, породженого імпульсно-збуреним хвильовим рівнянням (Теорема 2).

9) Oleksiy Kapustyan, Oleksandr Misiats, Oleksandr Stanzhytskyi "Qualitative analysis of solutions of the bidomain equation with random perturbations"// Stochastics and Dynamics (Q2) (подано до друку)

arXiv:2111.06485v1

Капустяну О.В. та Станжицькому О.М. належить постановка заадчі та доведення теорем про властивості глобальних розв'язків (Теорема 2), інваріантні міри (Теорема 4) та вплив малих збурень (Теореми 5,6).

10) Oleksiy Kapustyan, Sergey Dashkovskiy "Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equations"// Evolution Equation and Control Theory (Q2), 2021, опубліковано онлайн

http://dx.doi.org/10.3934/eect.2021054

11) Капустян О.В., Юсипів Т.В., Курилко О.Б. "Робастна стійкість глобального атрактору системи реакція-дифузія"// Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, 2021, № 3, С. 46-50

https://drive.google.com/file/d/1CnfU4A5QuOHwrvW3J23OTzWgApIW5dfj/view?usp=sharing

Капустяну О.В. належить постановка задачі та участь у доведенні основного результату про AG стійкість атрактору системи реакція-дифузія

(Теорема 2).

12) Капустян О.В., Юсипів Т.В. "Стійкість щодо збурень для атрактору дисипативної системи типу PDE-ODE"// Нелінійні коливання (категорія А) (прийнято до друку)

Капустяну О.В. належить постановка задачі та участь у доведенні основного результату про робастну стійкість атрактору системи PDE-ODE (Теорема 2).

Тези доповідей конференцій:

"Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка"(Чернівці, 28 - 30 жовтня, 2021), тези доповідей:

1) "Застосування методу усереднення до задачі оптимального керування диференціальним включення зі швидкоколивними коефіцієнтами на півосі"(автори Кічмаренко О.Д., Касімова Н.В., Жук Т.Ю.), С. 84.

2) "Стійкість притягуючих множин імпульсних многозначних напівпотоків (автори Капустян О.В., Перестюк Ю.М., Мамса К.Ю.), С. 78.

"International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations QUALITDE-2021 (Тбілісі, Грузія, 18-20 грудня, 2021), доповіді:

1) "Approximate solution of optimal control problem for differential inclusion with fast-oscillating coefficients on semi-axis"(автори Olha Kichmarenko, Olena Kapustian, Nina Kasimova, Tetyana Zhuk)

2) "Robust stability of global attractors for reaction-diffusion system w.r.t. disturbances"(автори Mykola Perestyuk, Oleksiy Kapustyan, Taras Yusypiv, Sergey Dashkovskiy)

3) "Weak solutions for coupled stochastic functional-differential equations in infinite-dimensional spaces"(автор O. Stanzhytskyi, A. Stanzhytskyi, T. Kovalchuk, R. Uteshova)

ЗАТВЕРДЖЕНО
Проректор з наукової роботи
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

_______________ Ганна ТОЛСТАНОВА

“ 08 ” ___12___ 2021 р.

АКТ
впровадження (використання) результатів
виконаної науково-дослідної роботи
у навчальний процес

По НДР Ф81/41743 «Стійкість та робастність атракторів нелінійних нескінченновимірних систем», виконаної в період з 26 липня 2021 року по 15 грудня 2021 року, розроблено:

(1) для нелінійних нескінченновимірних систем були встановлені результати щодо стійкості по відношенню до зовнішніх збурень. Були доведені теореми про локальну стійкість від входу до стану (LISS) та про асимптотичне підсилення (AG) для компактних та асимптотично компактних збурених нескінченновимірних систем;

(2) для еволюційних керованих систем зі збуреннями в коефіцієнтах обгрунтовано методи побудови наближених оптимальних керувань та наближеного синтезу.

Комісія в складі:

Голова комісії: голова вченої ради механіко-математичного факультету, декан механіко-математичного факультету, доктор фіз.-мат. наук, доцент Оксана БЕЗУЩАК,

Члени комісії:

1. завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь, доктор фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України Микола ПЕРЕСТЮК
2. завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки, доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України Ярослав ЖУК
3. заступник декана з навчальної роботи, кандидат фіз.-мат. наук, доцент Олексій ХАРИТОНОВ

встановила впровадження в навчальний процес у 2021 р. вище наведених результатів досліджень та місце їх використання:

1. *стійкість від входу до стану нелінійних диференціальних рівнянь* – дисципліна вільного вибору студента «Якісні й асимптотичні методи теорії диференціальних рівнянь», 2 год., 3 курс бак., математика, кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь, викладач проф. Капустян О.В.,
2. *наближені методи в задачах оптимального керування* – обов'язкова навчальна дисципліна «Оптимальне керування в економічних моделях», 1 год., 2 курс маг., математика, кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь, викладач проф. Капустян О.В.

"08" 12 2021 р.

Голова комісії: голова вченої ради механіко-математичного факультету, декан механіко-математичного факультету, доктор фіз.-мат. наук, доцент

Оксана БЕЗУЩАК

Члени комісії: завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь, доктор фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України

Микола ПЕРЕСТЮК

завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки, доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України

Ярослав ЖУК

заступник декана з навчальної роботи, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Олексій ХАРИТОНОВ