

УДК 537.624  
№ держреєстрації  
Інв. №

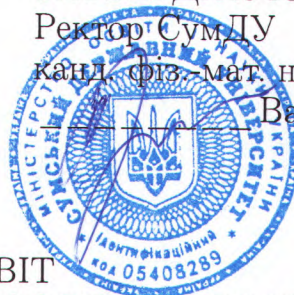
Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет (СумДУ)  
40007, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2; тел. (0542) 33 41 08,  
факс (0542) 33 40 49, E-mail: kanc@sumdu.edu.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ

Ректор СумДУ

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Василь КАРПУША



ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

**Колективна динаміка феромагнітних наночастинок зі  
скінченною анізотропією у в'язкій рідині**

грантова підтримка Національного фонду досліджень України у межах  
спільного конкурсу Ф81 науково-дослідних проектів Державного фонду  
фундаментальних досліджень (ДФФД) і Німецького дослідницького  
співтовариства (DFG)

**ПОБУДОВА БАЗОВИХ ДЕТЕРМІНІСТИЧНИХ ТА  
СТОХАСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ  
ДИНАМІЧНИХ І ТЕПЛОВИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ  
НЕВЗАЄМОДІЮЧИХ ФЕРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК  
(ФНЧ) У В'ЯЗКІЙ РІДИНІ. ТРАНСПОРТ ЗВАЖЕНИХ У  
РІДИНІ ФНЧ ІНДУКОВАНИЙ ЗМІННИМ ГРАДІЄНТНИМ  
ТА ПОСТІЙНИМ ОДНОРІДНИМ МАГНІТНИМИ ПОЛЯМИ**

Керівник НДР  
канд. фіз.-мат. наук, доцент






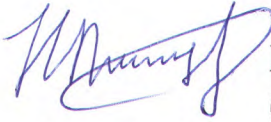
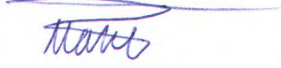
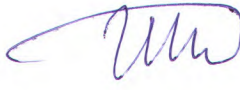
Тарас ЛЮТИЙ

14.12.2021

Рукопис завершено 14 грудня 2021 р.

Результати роботи розглянуті на засідання наукової ради СумДУ, протокол від 14 грудня 2021 р. № 6

## СПИСОК АВТОРІВ

- |  |   |  |
|--|---|--|
| Керівник НДР,<br>доцент кафедри ЕЗПФ,<br>канд. фіз.-мат. наук,<br>доцент |    | Т. В. Лютий<br>(реферат, вступ, розділ<br>1,2,3, висновки) |
|  | 14.12.2021  |  |
| Професор кафедри ЕЗПФ,<br>д. фіз. -мат. наук,<br>проф.                   |    | С. І. Денисов<br>(реферат, розділи<br>4, 5, 6)             |
|  | 14.12.2021  |  |
| Старш. наук. співроб. НДЧ,<br>канд. фіз.-мат. наук<br>доцент             |    | О. С. Денисова<br>(підрозділ 5.1,<br>розділи 5, 6)         |
|  | 14.12.2021  |  |
| Інженер-програміст<br>ТОВ «Брокодерс», м. Суми<br>канд. фіз.-мат. наук   |  | В. В. Рева<br>(підрозділи 2.1,<br>3.1)                     |
|  | 14.12.2021  |  |
| Аспірант кафедри ЕЗПФ  |  | М. М. Москаленко<br>(підрозділи 5.1.1,<br>5.1.4)           |
|  | 14.12.2021  |  |
| Аспірант кафедри ЕЗПФ  |  | Н. С. Петренко<br>(розділ 1,<br>підрозділ 3.2)             |
|  | 14.12.2021  |  |
| Аспірант кафедри ЕЗПФ  |  | М. О. Павлюк<br>(підрозділи 2.1,<br>3.2)                   |
|  | 14.12.2021  |  |
| Студент кафедри ЕКТ  |  | Ю. О. Шкиря<br>(підрозділи 3.2,<br>4.2.4)                  |
|  | 14.12.2021  |  |

## РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 79 с., 25 рис., 70 джерел.

ФЕРОМАГНІТНА НАНОЧАСТИНКА, ПОТУЖНІСТЬ ВТРАТ, ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАНЕ ПОЛЕ, ПРЕЦЕСІЙНІ РЕЖИМИ, ТРАНСПОРТ, ГРАДІЄНТНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ.

Об'єкт дослідження – 1) прецесійні режими зв'язаної магнітної та механічної динаміки феромагнітних наночастинок у в'язкій рідині; 2) спрямований транспорт (дрейф) наночастинок у градієнтних магнітних полях.

Предмет дослідження – умови існування спрямованого транспорту зазначених об'єктів та залежність швидкості їх дрейфу і потужності втрат енергії від параметрів системи.

Мета дослідження – визначення оптимальних параметрів відгуку періодично збуджених систем феромагнітних наночастинок.

Методи дослідження – методи мікромагнетизму, методи математичної фізики, чисельні методи.

Проект спрямований на поглибленому дослідженні вимушеної динаміки феромагнітних однодомених наночастинок зі скінченною одноосьовою анізотропією, зважених у в'язкій рідині та збуджуваних зовнішнім обертовим магнітним полем. На основі розроблених аналітичних та чисельних інструментів ми аналізуємо з умови генерації різних прецесійних режимів та їх вплив на поглинання енергії. Показано, що зміни динамічних режимів призводять до стрибкоподібних змін потужності втрат. Вперше описано явище індукованого дисипацією обертання магніто-ізотропної наночастинок в обертовому полі. Також встановлено, що градієнтне магнітне поле, яке змінюється з часом за гармонійним законом, може ініціювати неочікуваний ефект – появу спрямованого транспорту наночастинок. Сформульовано умови існування цього ефекту та визначено залежність від часу середньої швидкості наночастинок. Показано, що причиною появи транспорту є перпендикулярна до градієнтного поля компонента зовнішнього однорідного магнітного поля

Результати НДР можуть бути використані для підбору оптимальних параметрів у методі магнітної гіпертермії для терапії онко-захворювань, для адресної доставки ліків у організмі та для виробництва композитних покриттів, що ефективно поглинають радіохвилі.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	6
1 МОДЕЛЬ ТА ОСНОВНІ РІВНЯННЯ СУМІСНОЇ МАГНІТНОЇ ТА МЕХАНІЧНОЇ ДИНАМІКИ НАНОЧАСТИНКИ .....	10
2 КУТОВІ ТРАЄКТОРІЇ ТА ДИСИПАЦІЯ ЕНЕРГІЇ .....	17
2.1 Зв'язана динаміка наночастинки, зваженої в рідині, та її магнітно- го моменту .....	17
2.2 Режими прецесійного руху для наночастинки зі скінченною анізо- тропією .....	22
3 КУТОВІ ТРАЄКТОРІЇ ТА ДИСИПАЦІЯ ЕНЕРГІЇ .....	28
3.1 Зв'язана динаміка наночастинки, зваженої в рідині, та її магнітно- го моменту .....	28
3.2 Режими прецесійного руху для наночастинки зі скінченною анізо- тропією .....	33
4 ДИНАМІКА ФЕРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК У ГРАДІ- ЄНТОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ, ЩО ЗМІНЮЄТЬСЯ З ЧАСОМ ЗА ГАРМОНІЧНИМ ЗАКОНОМ .....	39
4.1 Фізична модель та рівняння балансу .....	39
4.2 Динаміка наночастинок при $\nu_{\perp} = 0$ і $\nu_{\parallel} = 0$ .....	42
4.2.1 Окремі аналітичні розв'язки .....	43
4.2.2 Деякі точні співвідношення .....	43
4.2.3 Наближені розв'язки .....	45
4.2.4 Чисельна перевірка аналітичних результатів .....	47
5 ДРЕЙФ ФЕРРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК ПРИ НАЯВ- НОСТІ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЇ КОМПОНЕНТИ ОДНОРІДНО- ГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ .....	50

5.1	Динаміка наночастинок при $\nu_{\perp} > 0$ і $\nu_{\parallel} = 0$ .....	50
5.1.1	Явище дрейфу: попередні результати та визначення.....	50
5.1.2	Динаміка наночастинок в околі початку координат.....	51
5.1.3	Швидкість дрейфу на великих відстанях від початку координат.....	55
5.1.4	Явище дрейфу: чисельні результати.....	56
6	ДРЕЙФ ФЕРРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК ПРИ НАЯВ- НОСТІ ПАРАЛЕЛЬНОЇ КОМПОНЕНТИ ОДНОРІДНОГО МА- ГНІТНОГО ПОЛЯ.....	60
6.1	Динаміка наночастинок при $\nu_{\perp} = 0$ і $\nu_{\parallel} > 0$ .....	60
6.2	Динаміка наночастинок при $\nu_{\perp} > 0$ і $\nu_{\parallel} > 0$ .....	61
	ВИСНОВКИ .....	66
	ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	71

## ВСТУП

Феромагнітні наночастинки завдяки своїм цікавим фізичним властивостям привертають велику увагу в таких різних областях, як прикладна фізика, мікро- та нанотехнології та медицина. Крім розвитку традиційних напрямків, таких як розробка нових засобів запису та збереження інформації з високою щільністю і виробництва «розумної рідини» для амортизаторів і електромагнітно-керованих динамічних ущільнень у високоточних двигунах, в даний момент ФНЧ широко використовуються як магніто-контрастні середовища, що розширюють можливості томографії [1, 2], у перспективному методі магнітної гіпертермії онкологічних захворювань [3, 4], як носії для спрямованої доставки лікарських препаратів до уражених тканин [5, 6], як основа біосенсорів та методів сепарації клітин і макромолекул [7–9]. Феромагнітні наночастинки також використовуються в якості одного з ключових елементів активних змішувачів для т.з. «мікро-рідин» з малим значенням числа Рейнольдса [10]. Кілька наночастинок, закріплених на еластичному полімері, утворюють штучний «джгутик», який може приводитися у рух зовнішнім магнітним полем і використовується в якості двигуна для «мікро-ботів» і «м'яких» роботів [11]. Нарешті, також слід звернути увагу на високопродуктивні мікрохвильові поглиначі з комплексною структурою, що базуються в тому числі на феро-гелях [12–16]. Такі матеріали мають значення як для захисту від мікрохвильового випромінювання, так і для стелс-технологій для літальних апаратів та реактивних снарядів.

З точки зору застосування, відгук феромагнітної наночастинки на зовнішні поля є ключовим питанням. І особливу увагу слід приділити двом явищам. По перше, мова про поглинання наночастинкою енергії зовнішнього змінного поля з подальшим нагріванням середовища але без спрямованого трансляційного руху наночастинок. А по друге, спрямований транспорт наночастинок в системі зовнішніх полів спеціальної форми, параметри якого визначаються параметрами системи. Що стосується нагрівання, тут енергія поля перетворюється в теплову як за рахунок в'язкого обертання ФНЧ, так і завдяки внутрішній загасаючій динаміці намагніченості в кристалічній решітці частинки. Можливі ж втрати потужності за рахунок індукційних струмів провідності в наночастинках надто малі і ними,

як правило, нехтують. Один з найбільш відомих, простих та ефективних методів визначення властивостей таких систем описується в квазірівноважному наближенні та у рамках теорії лінійного відгуку на змінне поле [17]. Розгляд базується на концепції часів релаксації для магнітної та механічної підсистем та розгляді паралельної дії двох означених каналів дисипації. Незважаючи на простоту та очевидність цієї концепції, область її застосування обмежена. Як свідчать останні експерименти [18–23, 23–25], мають місце сильні відхилення від прогнозів даної спрощено моделі внаслідок більш складного характеру теплової та колективної поведінки.

Аналітичний опис вимушеного зв'язаного руху ФНЧ у рідині та її магнітного моменту є непересічною та складною проблемою. Не зважаючи на те, що основні модельні рівняння були введені Цеберсом [26] послідовне дослідження реакції феромагнітної наночастинки на періодичні поля відсутні до цих пір. Тим не менше, частковий прогрес був досягнутий, про що маються дані в літературі. Так, використовуючи лінеаризацію рівняння Лагранжа в деяких конкретних випадках, втрата потужності була розрахована в роботі [27]. Оскільки рівняння руху не використовувались, цей підхід не може застосовуватися для чисельного моделювання. Спрощені рівняння руху були використані в роботі [28], але питання поглинання енергії не розглядалось. Ґрунтуючись на коректній моделі, динаміка зв'язаних наночастинок досліджувалась за допомогою лінійного наближення [29]. Але у даному наближенні доданок, що відповідає за в'язке тертя був опущений в кінцевому підсумку. Нарешті, обертальні траєкторії та вирази для втрати потужності були отримані у випадку малих обертальних коливань [30–32] та у випадку прецесійного руху під дією обертового поля [33, 34]. Стохастичний випадок розглянутий у роботі [35], але зазначена робота описує лише перші кроки у цьому напрямку. Незважаючи на використання апарату рівнянь Фоккера-Планка та Ланжевена, ряд методологічних питань залишається відкритим. Зокрема, необхідно здійснити пошук оптимальної форми рівнянь Ланжевена, найбільш придатних для чисельного моделювання. Також, зазначимо, що питання втрати потужності з позицій обертових траєкторій наночастинки та її магнітного моменту до початку даного дослідження не розглядалось взагалі.

Основні ж результати наразі отримано у наближенні «жорсткого дипо-

ля», коли магнітний момент вважається закріпленим до осі анізотропії. Це наближення, яке виконується у випадку досить великого магнітного поля анізотропії, було використано для вивчення, наприклад, ефектів обертання частинок, дипольної взаємодії та теплових коливань [36–40]. Для врахування взаємодії часто виконується методом молекулярної динаміки. Виходячи з цього і використовуючи модель «жорсткого диполя», де магнітний момент наночастинки заблокований в кристалічній решітці, вже було досліджено ряд магнітних властивостей ферорідин. Так, у роботах [41, 42] вивчалась структура ферорідини та початкова сприйнятливість, в роботі [42] було використано симуляцію для визначення розподілу розмірів ФНЧ, а динамічні властивості ферорідин досліджені у [43]. Для вивчення втрат потужності також інколи використовується модель, заснована на рівнянні Ландау-Ліфшиця, де враховується лише внутрішня прецесія магнітного моменту [44]. Природно, що модель в якій детально розглядається зв'язаний магнітний та механічний рух до сьогоднішнього дня не використовувалася для цих цілей.

Іншим завданням проєкту є дослідження транспортних властивостей ансамблів наночастинок. Нещодавно теоретично та чисельно було встановлено [45–48], що спрямований транспорт у вигляді дрейфу наночастинок можна реалізувати, використовуючи ефект Магнуса. Згідно з цим ефектом на частинку, що обертається та рухається у в'язкій рідині в деякому напрямку, діє перпендикулярна до напрямку руху сила. Використовуючи наближення, при якому намагніченість вважається вмерженою в тіло частинки (ця модель описує динаміку наночастинок з великим полем магнітної анізотропії), було показано, що якщо обертальний та коливальний рухи наночастинок певним чином синхронізовані, тоді сила Магнуса матиме один і той же напрямок і ініціюватиме їх спрямований транспорт. При цьому обертальний рух наночастинок індукується нерівномірно обертальним зовнішнім магнітним полем, а їх коливальний рух – деяким періодичним у часі силовим полем, однаковим для всіх частинок. Складність практичної реалізації такого силового поля змушує здійснювати пошук інших методів генерації спрямованого транспорту феромагнітних наночастинок у в'язкій рідині.

Одним із найбільш важливих з практичної точки зору є метод, що ба-



зується на використанні градієнтних магнітних полів [49]. В рамках моделі, в основу якої покладено мінімальну систему рівнянь руху наночастинки і її намагніченості, показано [50], що у градієнтному магнітному полі існує чотири режими спрямованого транспорту наночастинок. Якщо наночастинки розташовані не надто близько до початку координат (де градієнтне поле зникає), тоді реалізується два режими, в яких всі частинки справа від початку координат рухаються вправо, а всі частинки зліва від початку координат рухаються вліво. Запропонований же у даній роботі підхід передбачає використання градієнтного поля, що змінюється періодично. Це надає можливість комбінувати процеси концентрації наночастинок з процесами їх нагрівання. Також періодичний характер градієнтного поля генерує керувані додатковими стаціонарними полями нові режими транспорту та нові можливості прецезійного керування рухом наночастинок.

Результати які були подані у звіті були отримані в рамках виконання як цього проекту так і держбюджетної науково дослідницької роботи, № 0119U100772, назва "Спрямований транспорт та дисипація енергії в системах феромагнітних наночастинок і магнітних скірміонів що зазначено у розділах Acknowledgements кожної статті, які оприлюднюють зазначені результати.

Результати НДР опубліковані у роботах [51–54].

# 1 МОДЕЛЬ ТА ОСНОВНІ РІВНЯННЯ СУМІСНОЇ МАГНІТНОЇ ТА МЕХАНІЧНОЇ ДИНАМІКИ НАНОЧАСТИНКИ

В основу модельного розгляду покладено припущення, що феромагнітна наночастинка має сферичну форму радіусом  $R_p$ , намагніченість наночастинки є однорідною і характеризується вектором  $\mathbf{M}$ , модуль якого завжди залишається константою ( $|\mathbf{M}| = M = \text{const}$ ), нарешті, частинка є однорідною щодо маси, що характеризується густиною  $\rho$ . Зауважимо, припущення про однорідну намагніченість часто використовується в літературі, а справедливість припущення описується в рамках моделі когерентного обертання усіх спінів [55], що і забезпечує сталість модуля  $\mathbf{M}$ .

Така частинка здатна здійснювати сферичний рух (або рух навколо власного центра маси, що не бере участі у трансляційному русі) у рідині з в'язкості  $\eta$  та відносно цієї рідини. Вимушений сферичний рух наночастинка здійснює під дією змінних зовнішніх полів, одним з прикладів яких є поле, що обертається, або циркулярно-поляризоване зовнішнє магнітне поле вигляду

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{e}_x H \cos(\Omega t) + \mathbf{e}_y \varrho H \sin(\Omega t), \quad (1.1)$$

де  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  є одиничними векторами декартової системи координат,  $H$  – амплітуда поля,  $\Omega$  – частота поля  $t$  час, та  $\varrho$  – фактор, що визначає напрямок поляризації ( $\varrho = \pm 1$ ). Вибір поля такого типу зумовлений зручністю отримання аналітичних результатів для спрощених моделей розгляду, а саме для моделі фіксованої в твердій матриці наночастинки та моделі жорсткого диполя.

Магнітна енергія наночастинки у випадку одноосьової магнітокристалічної анізотропії задається стандартним виразом

$$W = -\frac{H_a V}{2M} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 - V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}(t) - V H_z \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_z, \quad (1.2)$$

де  $H_a$  – величина поля зазначеної одноосьової анізотропії,  $\mathbf{n}$  – одиничний вектор, який визначає напрямок осі легкого намагнічування наночастинки,  $H_z$  – величина додаткового однорідного та стаціонарного поля вздовж вісі  $z$ . Розгляд дії зовнішнього поля на наночастинку потрібно проводити з урахуванням анізотропії, що, зазвичай, робиться в використаннім концепції

пції ефективного магнітного поля, що можна записати як

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -V^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{M}} = H_a M^{-1} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{H}(t) + \mathbf{e}_z H_z. \quad (1.3)$$

Сферичний рух наночастинки та загасаюча прецесія магнітного моменту всередині її решітки супроводжується розсіюванням енергії  $W$ , що у кінцевому підсумку призводить до нагрівання середовища, яке оточує частинку. Наслідуючи викладення у роботі [56], втрати потужності можна визначити як  $Q = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (1/\tau) \int_0^\tau dt q$ , де  $q = -\dot{W}$  – це миттєві втрати потужності,  $\tau$  – час спостереження, а крапка угорі позначає похідну за часом. Відповідно до рівняння (1.2) можна записати питомі втрати потужності як  $q = V \mathbf{H}_{\text{eff}} \cdot \dot{\mathbf{M}}$ . Перепишемо втрати потужності зовнішнього магнітного поля, що діє на наночастинку у безрозмірному вигляді як  $\tilde{Q} = Q/(H_a V M \Omega_0)$  (тут  $\Omega_0$  є певною характеристичною частотою, яка визначається в рамках модельного підходу, що застосовується та слугує для зручності подальшого подання)

$$\tilde{Q} = \lim_{\tilde{\tau} \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{\tau}} \int_0^{\tilde{\tau}} d\tilde{t} \mathbf{h}_{\text{eff}} \cdot \dot{\mathbf{m}}. \quad (1.4)$$

У виразі (1.4) ми перейшли до безрозмірних величин для спрощення як подальшого аналізу так і інтерпретації його результатів. Зокрема,  $\mathbf{h}_{\text{eff}} = \mathbf{H}_{\text{eff}}/H_a$  – безрозмірне ефективне поле,  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$  – одиничний вектор, який подає напрям намагніченості наночастинки,  $\tilde{t} = \Omega_0 t$  – безрозмірний час,  $\tilde{\tau} = \Omega_0 \tau$  – безрозмірна величина загального часу спостереження. Саме тому вираз (1.4) зручно застосовувати як для аналітичного, так і для чисельного вивчення проблеми взаємодії змінного зовнішнього поля з подальшим нагріванням середовища.

Використана базова система рівнянь є справедливою у випадку, коли тепловими флуктуаціями можна знехтувати, що можна виразити математично як  $\kappa = VM \cdot H_m/k_B T \gg 1$ . Тут  $k_B = 1.3807 \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup> · г · с<sup>-2</sup> · К<sup>-1</sup> – константа Больцмана,  $T$  – термодинамічна температура. Умова означає, що магнітна енергія є істотно більша за теплову, а тому теплові флуктуації здатні привести лише до невеликих збурень детерміністичної траєкторії під час вимушеного руху. Мова йде як про траєкторію магнітного моменту відносно кристалічної решітки наночастинки, так і про обертання наночастинки як цілого. Озвучені вимоги в низці випадків є

цілком реалістичними. Візьмемо, наприклад, наночастинки магхеміту [57], середній радіус яких  $R = 20\text{nm}$ , величина поля анізотропії  $H_a = 910\text{ E}$ , намагніченість  $M = 4.25 \cdot 10^3\text{ Гс}$ , і нехай амплітуда зовнішнього змінного поля складає  $H_m = 0.05H_a$ . Тоді співвідношення магнітної та теплової енергії буде складати  $\kappa \approx 12$ . Це означає, що ймовірність, ймовірність істотних відхилень від детерміністичної траєкторії буде пропорційною до  $\exp(-\kappa) = \exp(-12) \approx 6.1410^{-6}$ , тобто є достатньо незначною, і результати, отримані в детерміністичному наближенні можна вважати досить близькими до реальних.

Важливим фактором є також частота поля, тому на додачу до вимог до амплітуди зовнішнього поля, існують обмеження щодо частоти поля. По-перше, частота має нижню границю, зумовлену такими міркуваннями. Навіть якщо тепла енергія багато менша від магнітної  $\kappa \gg 1$  виконується, слід згадати про час очікування. Якщо система вимушена чекати протягом проміжку, що суттєво перевищує характерний час броунівської релаксації [58]  $\tau_B = 3\eta V/(k_B T)$ , то значне відхилення від детерміністичної траєкторії станеться з великою долею ймовірності на одному періоді зовнішнього поля. І тоді вже не буде підстав говорити про адекватність детерміністичного підходу реальній ситуації. Цей факт зумовлює існування характерної частоти  $\Omega_B = 1/\tau_B = k_B T/(3\eta V)$ , що визначає порядок величини частоти, за якої теплові флуктуації вже мають істотно вплинути на обертову траєкторію. Тому частота зовнішнього поля повинна бути багато більшою від  $\Omega_B$ . Далі, адекватність до реальності моделі, в якій внутрішня прецесія магнітного моменту також залишається детерміністичною, може бути порушеною протягом часу релаксації Нееля, що визначається як  $\tau_N = (\Upsilon/\pi)^{-1/2} \exp(\Upsilon)(2\alpha\gamma H_a)^{-1}$  (тут  $\alpha \ll 1$  – безрозмірна константа загасання,  $\gamma \approx 1.76 \cdot 10^7\text{ рад} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Гс}^{-1}$  – гіромагнітне відношення) [59,60],  $\Upsilon = VMH_a/(k_B T)$ . Таким чином, ми встановлюємо ще одну характеристичну частоту  $\Omega_N = 1/\tau_N = 2\alpha\gamma H_a(\Upsilon/\pi)^{1/2} \exp(-\Upsilon)$ , що встановлює іншу нижню межу для частоти зовнішнього поля. Таким чином, у кінцевому підсумку маємо  $\Omega \gg \max[\Omega_B, \Omega_N]$ . Для наночастинок магхеміту [57], які вже використовувалися для наших оцінок, та значень  $\alpha = 0.01$  and  $T = 310\text{K}$ ,  $\eta = 5 \cdot 10^{-2}\text{ П}$  (параметри людської крові), можна легко підрахувати значення обох частот:  $\Omega_B \approx 8.54 \cdot 10^3\text{ Гц}$  та  $\Omega_N \approx 2.08 \cdot 10^{-96}\text{ Гц}$  або, у кінцевому

підсумку,  $\Omega \gg 8.54 \cdot 10^3$  Гц.

Як вже зазначалося, зв'язана динаміка магнітного моменту та обертання наночастинки як цілого є нетривіальною проблемою. У разі високих частот, достатньо великих частинок чи значної в'язкості рідини-носія, а, також, не надто великій анізотропії, рух наночастинки як цілого незначний. Тут слід розглядати лише динаміку магнітного моменту, для чого використовується лише відоме рівняння Ландау-Ліфшица-Гілберта

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \alpha M^{-1} \mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}}. \quad (1.5)$$

У безрозмірній формі вихідне рівняння (1.5) можна подати у вигляді

$$\dot{\mathbf{m}} = -\Omega_r \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} + \alpha \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}. \quad (1.6)$$

Якщо застосувати рекурсивну підстановку або підстановку рівняння в самого себе та враховуючи що змішаний добуток, у якому присутні два однакові вектори дорівнює нулю, можна показати, що рівняння (1.6) є еквівалентним

$$(1 + \alpha^2) \dot{\mathbf{m}} = -\Omega_r \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \alpha \Omega_r \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} \quad (1.7)$$

Саме вираз (1.7) використовується для подальшого чисельного аналізу, оскільки допускає застосування стандартних процедур чисельного інтегрування.

Якщо одноосьова анізотропія наночастинки є досить сильною, а зв'язок із оточенням є, навпаки, слабким, внутрішня магнітна динаміка являтиме собою незначні коливання намагніченості навколо легкої вісі і не буде значним чином впливати на магнітну динаміку. В цьому випадку можна послуговуватися моделлю жорсткого диполя, в якій намагніченість вважається фіксованою у кристалічній решітці. Такий підхід подано у роботі [61] і часто застосовується ще й досі. Основною особливістю опису є використання двох рівнянь, одне з яких є відомою умовою обертання абсолютно жорсткого тіла, яке не піддається деформаціям, а друге рівняння є нічим іншим як основним рівнянням динаміки обертального руху тіла під дією

зовнішніх моментів сил

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \\ J\dot{\boldsymbol{\omega}} &= VM\mathbf{n} \times \mathbf{H} - 6\eta V\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Тут  $\boldsymbol{\omega}$  – кутова швидкість, з якою обертаються наночастинки,  $J(= 8\pi\rho R_p^5/15)$  – момент інерції наночастинки,  $V$  – об'єм наночастинки, і крапки над величинами означають похідні за часом. Якщо величина наночастинки досить мала, її моментом інерції можна знехтувати, що є загальноприйнятим підходом у літературі. І коли припустити, що  $J \equiv 0$ , рівняння (1.8) істотно спрощується

$$\dot{\mathbf{n}} = -\Omega_{cr}\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{h}), \quad (1.9)$$

Тут параметр  $\Omega_{cr} = MH_a/(6\eta)$  має зміст характерної частоти рівномірного механічного обертання.

Математична модель, що описує сумісну, зв'язану динаміка магнітного моменту та обертання наночастинки як цілого не є простою суперпозицією спрощених підходів, що описуються рівняннями (1.7) та (1.9). Як було детально продемонстровано у роботі [31], треба по перше, відштовхуватися від закону збереження повного моменту імпульсу, який пов'язує додатковий механічний момент із наявним магнітним; а, по друге, в релаксаційному доданку рівняння Ландау-Ліфшиця треба обраховувати лише відносний рух магнітного моменту у кристалічній решітці, виключаючи обертання наночастинки як цілого. Зрештою, було переконливо доведено, що сумісна динаміка описується наступними двома рівняннями:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \\ J\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \gamma^{-1}V\dot{\mathbf{M}} + VM \times \mathbf{H} - 6\eta V\boldsymbol{\omega},\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \alpha M^{-1} (\mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}). \quad (1.11)$$

Інерційним доданком за умови малих розмірів наночастинки також у більшості випадків доцільно знехтувати, і тоді вираз (1.10) можна переписа-

ти у вигляді більш простому для чисельного інтегрування. Далі, шляхом перетворень рівнянь для внутрішньої динаміки намагніченості (1.11) виокремлюємо доданки, які містять похідні за часом та отримуємо

$$\begin{aligned}\Omega_{cr}^{-1} \dot{\mathbf{n}} &= \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} / \Omega_r + (\mathbf{m} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{n}, \\ (1 + \alpha_1^2) \Omega_{r1}^{-1} \dot{\mathbf{m}} &= -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}^1 - \alpha_1 \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}^1,\end{aligned}\tag{1.12}$$

Тут  $\beta = \alpha M / 6\gamma\eta$ ,  $\Omega_{r1} = \Omega_r / (1 + \beta)$ ,  $\alpha_1 = \alpha / (1 + \beta)$ ,

$$\mathbf{h}_{\text{eff}}^1 = (\mathbf{e}_x h \cos \Omega t + \mathbf{e}_y \varrho h \sin \Omega t) (1 + \beta) + (\mathbf{m}\mathbf{n}) \mathbf{n}.\tag{1.13}$$

Після стандартного подання компонент векторів  $\mathbf{m}$  та  $\mathbf{n}$  через їхні сферичні кутові координати та перетворень зу урахуванням форми зовнішнього поля (1.1), можна отримати систему скалярних рівнянь відносно полярного  $\theta$  і азимутального  $\phi$  кутів вектора  $\mathbf{n}$ , а також відносно полярного  $\vartheta$  і азимутального  $\varphi$  кутів вектора  $\mathbf{m}$

$$\begin{aligned}(1 + \alpha_1^2) \Omega_{r1}^{-1} \dot{\vartheta} &= f_1 + \alpha_1 f_2, \\ (1 + \alpha_1^2) \Omega_{r1}^{-1} \dot{\varphi} &= \csc \vartheta (\alpha_1 f_1 - f_2), \\ \Omega_{r1}^{-1} \dot{\theta} &= \beta \alpha^{-1} (\omega_y \cos \phi - \omega_x \sin \phi), \\ \Omega_{r1}^{-1} \dot{\phi} &= \beta \alpha^{-1} [\omega_z - \cot \theta (\omega_y \sin \phi \\ &\quad + \omega_x \cos \phi)],\end{aligned}\tag{1.14}$$

Тут

$$\begin{aligned}f_1 &= [h(1 + \beta) \sin(\varrho \Omega t - \phi) - F \sin \theta \sin(\varphi - \phi)], \\ f_2 &= \cos \vartheta [h(1 + \beta) \cos(\varrho \Omega t - \phi) \\ &\quad + F \sin \theta \cos(\varphi - \phi)] - \sin \vartheta [(1 + \beta) h_z \\ &\quad + F \cos \theta], \\ F &= \cos \theta \cos \vartheta + \cos(\varphi - \phi) \sin \theta \sin \vartheta (= \mathbf{m}\mathbf{n}) \\ \omega_x &= \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ &\quad - (1 + \beta) [h_z \sin \vartheta \sin \varphi + h \cos \vartheta \cos(\Omega t)], \\ \omega_y &= \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ &\quad - (1 + \beta) [h_z \sin \vartheta \cos \varphi + h \cos \vartheta \sin(\varrho \Omega t)], \\ \omega_z &= (1 + \beta) h \sin(\varrho \Omega t - \varphi) \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \vartheta.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Необхідно підкреслити, що система рівнянь (1.14) разом із перевизначенням величин (1.15) найперше придатні до чисельного аналізу.

Записані вище модельні рівняння і являють собою той інструмент, за допомогою якого буде досліджено детерміністичний сумісний рух наночастинки, зокрема прецесійний рух що виникає під дією циркулярно-поляризованого поля. Підстави для нехтування температурними коливаннями скорочено були описані вище, а решту деталей можна знайти у роботах [32, 56]. Зазначимо, що стохастичний рух у випадку зв'язаної магнітної динаміки та механічного обертання ще не досліджений і лише певні аспекти питання обговорюються у роботах [35, 62].



## 2 КУТОВІ ТРАЄКТОРІЇ ТА ДИСИПАЦІЯ ЕНЕРГІЇ

### 2.1 Зв'язана динаміка наночастинки, зваженої в рідині, та її магнітного моменту

Коли трансляційний рух наночастинки відсутній, як у випадку фіксованої наночастинки, так і у випадку жорсткого диполя існує два режими сталої динаміки магнітного моменту  $\mathbf{m}$ , індукованих зовнішнім полем вигляду (1.1) [63–65]. Перший режим - це однорідна прецесія, коли магнітний момент (або легка вісь) обертаються слідом за вектором поля з певним сталим кутом відставання та кутом прецесії. Другий режим - це неоднорідна прецесія, за якого магнітний момент обертається з частотою не кратною зовнішній, а кут прецесії зазнає періодичних змін. Є підстави припускати, що подібний стан речей збережеться і у випадку у випадку сумісної динаміки магнітного моменту наночастинки та її легкої вісі. Проте, є також і підстави сподіватися на виявлення нових прецесійних режимів, зокрема, хаотичних, як це, наприклад, має місце під час дії лінійно-поляризованого поля на фіксовану наночастинку [56].

То розпочинати варто з перевірки існування найпростішого режиму - режиму однорідної прецесії. Якщо він існує, тоді стаціонарний розв'язок системи рівнянь (1.10), (1.11) можна подати у такій формі  $\varphi = \varrho\Omega t - \varphi_1$ ,  $\vartheta = \vartheta_1$ ,  $\phi = \varrho\Omega t - \phi_1$ ,  $\theta = \theta_1$  (див. Рис. 3.1). Щоб віднайти невідомі константи  $\varphi_1$ ,  $\phi_1$  and  $\vartheta_1$ ,  $\theta_1$ , що репрезентують кути прецесії та відставання, було використано умову відсутності руху магнітного моменту відносно кристалічної решітки наночастинок у вигляді

$$\dot{\mathbf{m}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m} = 0. \quad (2.1)$$

Якщо підставити рівняння (3.1) у друге рівняння системи (1.10) та знехтувати доданком, що відповідає за момент інерції, нескладно отримати

$$0 = \Omega_{cr}(\mathbf{m} \times \mathbf{n})(\mathbf{m}\mathbf{n}) + \boldsymbol{\omega}. \quad (2.2)$$

Далі, коли ввести до розгляду нову координатну систему  $x''y''z''$ , що здійснює обертання разом із зовнішнім полем, як це схематично проілюстрова-

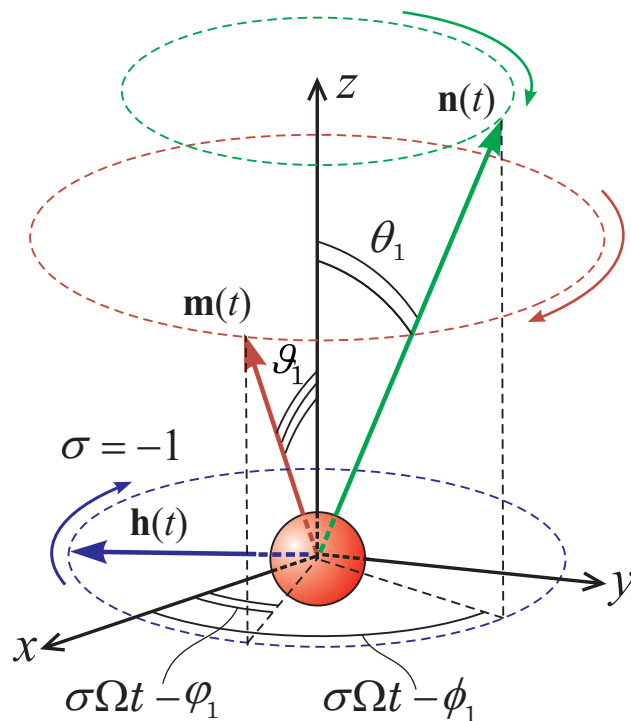


Рисунок 2.1 – Схематичне зображення поведінки векторів  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}$  та систем координат, що використовуються для опису режиму прецесії

но на рисунку 3.1, то подання кутової швидкості буде напрочуд простим

$$\boldsymbol{\omega}'' = (-\varrho\Omega \sin \theta_1, 0, 0). \quad (2.3)$$

Однак це породжує іншу проблему: вираз для динаміки магнітного моменту (1.11) не може бути так само легко поданим у зазначеній новій системі координат. Тому потрібно записати явну форму всіх векторів, що входять у рівняння (1.11) лабораторній системі координат. І складність виникає саме із явним виглядом кутової швидкості, або пошуку нового вигляду (3.3). Для виконання необхідних перетворень використовують матрицю повороту у вигляді

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \Phi_1 & -\sin \Phi_1 & \sin \theta_1 \cos \Phi_1 \\ \cos \theta_1 \sin \Phi_1 & \cos \Phi_1 & \sin \theta_1 \sin \Phi_1 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

де  $\Phi_1 = \varrho\Omega t - \phi_1$ . Далі введемо таке позначення

$$F_1 = \sin \theta_1 \sin \vartheta_1 \cos(\phi_1 - \varphi_1) + \cos \theta_1 \cos \vartheta_1 \quad (2.5)$$

та за його допомогою перепишемо компоненти векторів  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$  в лабораторній системі використовуючи матрицю повороту (3.4). У такий спосіб отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} -\sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 \left( \frac{\varrho \Omega}{\Omega_r} - h_z \right) &= \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \phi_1 \frac{\varrho \Omega}{\Omega_{cr}}, \\ h \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 &= \sin^2 \theta_1 \frac{\varrho \Omega}{\Omega_{cr}}, \\ F_1 \sin(\vartheta_1 - \theta_1) \sin \varphi_1 &= \sin \vartheta_1 \left( \frac{\varrho \Omega}{\Omega_r} - h_z \right), \\ F_1 \sin \theta_1 \sin(\varphi_1 - \phi_1) &= h \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Далі, пряме інтегрування рівнянь (1.4) з врахуванням подання векторів  $\mathbf{m}$  та  $\mathbf{n}$  у сферичних координатах

$$\dot{\mathbf{m}} = (-\varrho \Omega \sin \vartheta_1 \sin \Psi_1, \varrho \Omega \sin \vartheta_1 \cos \Psi_1, 0), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{n} = (\sin \theta_1 \cos \Phi_1, \sin \theta_1 \sin \Phi_1, \cos \theta_1), \quad (2.8)$$

де  $\Psi_1 = \varrho \Omega t - \varphi_1$ , отримуємо вираз для потужності втрат для режиму однорідної прецесії

$$\tilde{Q} = 2\varrho \tilde{\Omega} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1. \quad (2.9)$$

Тут,  $\tilde{\Omega} = \Omega / \Omega_{r1}$ .

Вираз для чисельного обчислення втрат потужності, який дозволить верифікувати аналітичні розрахунки (3.9) отримується також з використанням співвідношення (1.4) та подання векторів  $\mathbf{m}$  and  $\mathbf{n}$  у сферичних координатах. Введемо параметр  $\tilde{\tau} = \tau \Omega_{r1}$  (який потім буде вибраний як  $10^5$  під час моделювання) і перепишемо виразі для компонент поля в дискретні моменти часу, або у вигляді так званої різничної схеми

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ h_{xi} (\cos \vartheta_i \cos \varphi_i \Delta \vartheta_i - \sin \vartheta_i \sin \varphi_i \Delta \phi_i) \right. \\ &\quad + h_{yi} (\cos \vartheta_i \sin \varphi_i \Delta \theta_i + \sin \vartheta_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i) \\ &\quad \left. - h_{zi} \sin \vartheta_i \Delta \vartheta_i \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

де  $N = \tilde{\tau} / \Delta \tilde{t}$  – кількість часових кроків на один періоді зовнішнього поля,

$\Delta\tilde{t}(\ll 1/\tilde{\Omega})$  – значення кроку часу в процедурі чисельного розрахунку,  $\vartheta_i = \vartheta(\tilde{t}_i)$ ,  $\varphi_i = \varphi(\tilde{t}_i)$ ,  $\Delta\vartheta_i = \frac{\partial\vartheta(\tilde{t}_i)}{\partial\tilde{t}}\Delta\tilde{t}$ ,  $\Delta\varphi_i = \frac{\partial\varphi(\tilde{t}_i)}{\partial\tilde{t}}\Delta\tilde{t}$ ,

$$\begin{aligned} h_{xi} &= h \cos(\varrho\tilde{\Omega}\tilde{t}_i) + F_i \sin\theta_i \cos\phi_i, \\ h_{yi} &= h \sin(\varrho\tilde{\Omega}\tilde{t}_i) + F_i \sin\theta_i \sin\phi_i, \\ h_{zi} &= h_z + F_i \cos\theta_i, \end{aligned} \tag{2.11}$$

тут  $F_i = F(\tilde{t}_i)$ ,  $\theta_i = \theta(\tilde{t}_i)$ ,  $\phi_i = \phi(\tilde{t}_i)$ .

Наявність додаткового ступеня вільності забезпечує більш цікавий та складний характер магнітної динаміки наночастинки. По-перше, як і для моделей фіксованої наночастинки, так і для моделі жорсткого диполя, для випадку наночастинки зі скінченною анізотропією буде формуватися звичайний неоднорідний або квазіперіодичний режим, який характеризується змінами кутів прецесії з частотою, що не кратна частоті поля. Такий тип руху ще називають або нутаціями. По-друге, як і у випадку фіксованої наночастинки, може відбуватися т.з. перемикання між двома однорідними режимами, що характеризується різними орієнтаціями напрямку її магнітного моменту. На додачу, реалізується ще один цікавий режим. коли він реалізується, наночастинка як ціле майже не рухається, тоді як магнітний момент здійснює коливання: кути  $\vartheta$  і  $\varphi$  вектора  $\mathbf{m}$  змінюються синхронно разом із зовнішнім полем без постійної складової, що може бути виявленою, кути ж  $\theta$  і  $\phi$  вектора  $\mathbf{n}$  при цьому практично дорівнюють константам, з незначним результуючим рухом в напрямку обертання зовнішнього поля. Такий тип руху досить поширений і реалізується в широкому діапазоні параметрів поля. Він виникає і в нижньому, і у верхньому положенні наночастинки, і в околі площини поляризації зовнішньої поля. Переходи між зазначеним типами руху проявляються у стрибкоподібних змінах залежності потужності втрат  $\tilde{Q}(\tilde{\Omega})$ . Так, наприклад, перемикання між двома однорідними режимами з переорієнтацією наночастинок призводить до зменшення втрат потужності, щонайменше, на один порядок. Найбільш типові залежності  $\tilde{Q}(\tilde{\Omega})$  показані на рисунку 3.2.

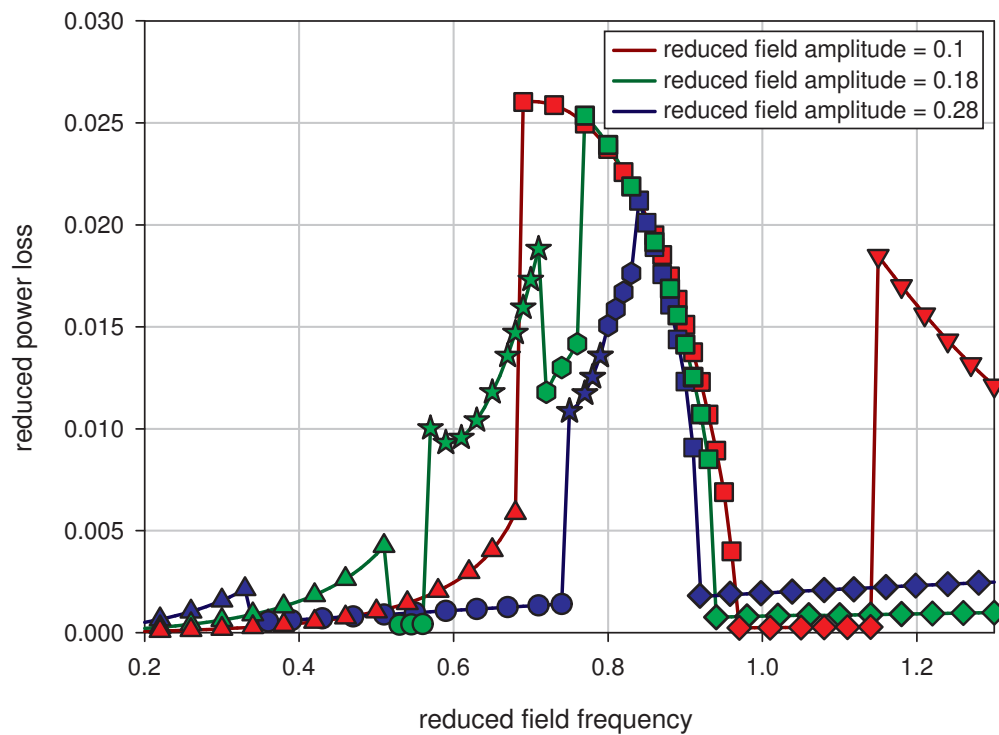


Рисунок 2.2 – Нагрівання наночастинок: типові залежності величини втрат потужності від частоти поля для визначених амплітуд. Значення параметрів системи наступні:  $\alpha = 0.1$ ,  $\eta = 0.006P$ ,  $M = 338G$ ,  $\varrho = +1$ ,  $h_z = 0$ . Чисельні розрахунки у вибраному діапазоні параметрів поля не залежать від початкових умов моделювання. Трикутними маркерами відмічені ділянки, що репрезентують однорідну прецесію у верхньому стані; круглими маркерами відмічені ділянки, що репрезентують однорідну прецесію після переходу в нижній стан; маркери-зірки репрезентують ділянки з неоднорідною прецесією; квадратні, шестикутні та трикутні маркери репрезентують неоднорідний режим з "нерухомою" легкою віссю.

## 2.2 Режими прецесійного руху для наночастинки зі скінченною анізотропією

Як кути прецесії, так і кути відставання зростають з частотою та амплітудою зовнішнього поля. Тому однорідна прецесія, яка генерується для малих частот та порівняно малих амплітуд має втрачати стабільний характер. І реалізується механізм, який можна вербалізувати так. Магнітний момент  $\mathbf{m}$  намагається наздогнати вектор зовнішнього поля  $\mathbf{h}$ , як наслідок, виходить за межі конусу прецесії та починає виконувати коливання змінюючи кут прецесії періодично. Ці коливання мають досить велику амплітуду, і вони відбуваються асинхронно із обертанням зовнішнього поля. У випадку фіксованої наночастинки подібне явище детально описувалось у роботі [65], а умови генерації такого режиму також детально пояснені у [63]. Для моделі ж жорсткого диполя такий режим вичерпано охарактеризований у роботі [66]. Якщо ж і вісь анізотропії, і магнітний момент не фіксовані жорстко та можуть здійснювати сумісний рух, неоднорідний режим реалізується з деякими особливостями. По-перше, для реальних значень параметрів системи, амплітуди коливань легкої осі та середнє значення її положення значно менші, ніж для магнітного моменту  $\mathbf{m}$ . По-друге, як видно з масштабів (див. Рис. 3.3), частота обертання вісі анізотропії  $\mathbf{n}$  менша, ніж для  $\mathbf{m}$ . Різні частоти обертання намагніченості та легкої осі наночастинки в неоднорідному режимі є нетривіальним результатом, оскільки у випадку однорідної прецесії дані частоти цілком збігаються.

З подальшим збільшенням частоти поля середнє положення вектора магнітного моменту  $\mathbf{n}$  починає зміщуватися, або дрейфувати за полем, що може відбуватися по-різному. Завдяки анізотропії вектор  $\mathbf{m}$  також буде брати участь у такому дрейфі. Перший сценарій дрейфу є хаотичним, за якого і середнє положення кожного вектору, і коливання навколо середніх положень векторів будуть нерегулярними. Зауважимо, що При цьому для кожного вектору швидкість дрейфу середнього положення є набагато меншою порівняно з частотою коливань навколо цього положення. Саме такий прецесійний режим показаний на рисунку (3.4). Тут порушення регулярного характеру руху особливо виражене для азимутального кута  $\varphi$  магнітного моменту  $\mathbf{m}$ . Зауважимо, що подібну хаотичну динаміку раніше спостерігали у чисельних дослідженнях для внутрішньої магнітної динамі-

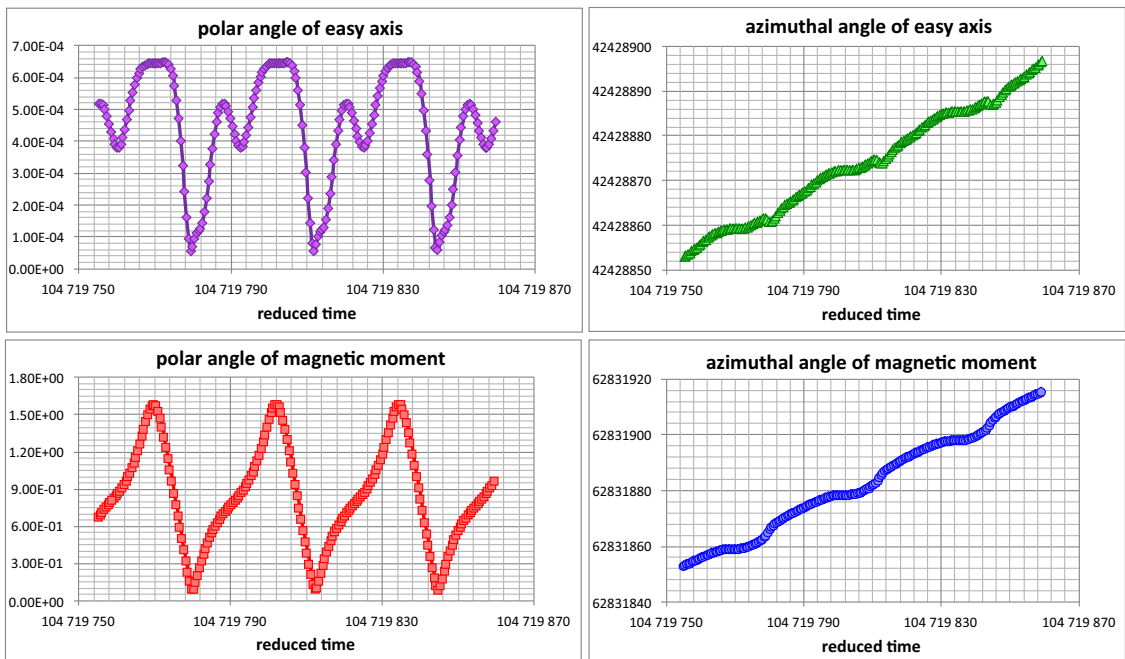


Рисунок 2.3 – Часові залежності куткових координат магнітного моменту та осі анізотропії наночастинки, під дією циркулярно поляризованого поля виду (1.1) з приведеною амплітудою  $h = 0.14$  і приведеною амплітудою частотою  $\tilde{\Omega} = 0.6$ . Частоти обертання для магнітного моменту та легкої осі відрізняються між собою та не є кратними, що видно з масштабів вертикальних осей графіків праворуч.

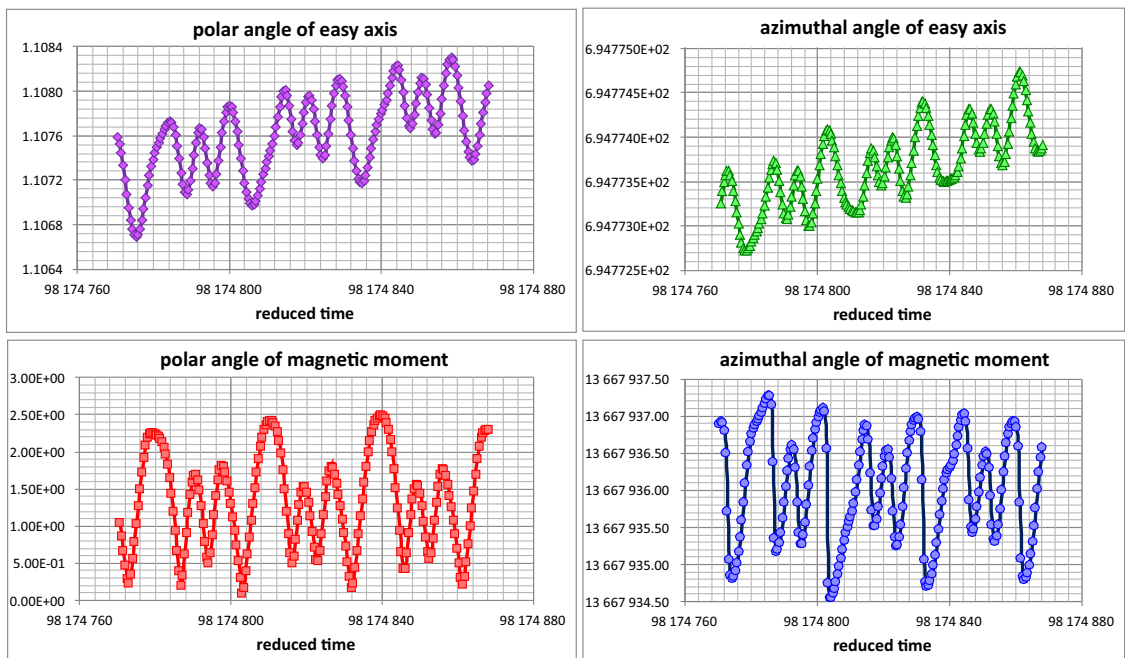


Рисунок 2.4 – Часові залежності куткових координат магнітного моменту та осі анізотропії наночастинки, під дією циркулярно поляризованого поля виду (1.1) з приведеною амплітудою  $h = 0.14$  і приведеною частотою  $\tilde{\Omega} = 0.64$ . Цей режим є виключно хаотичним через повільний хаотичний дрейф усереднених положень і магнітного моменту, і осі анізотропії, а також, через нерегулярні коливання магнітного моменту навколо осі анізотропії.

ки фіксованої наночастинки, (див. роботи [67–69]).

Під час зростання частоти відбувається наступна трансформація характеру руху. І далі тренди або середні положення векторів  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$  залишаються хаотичними, але коливання стають практично регулярними, а їх частоти збігаються з частотою поля, див. Рис. 3.5. Нажаль, масштаб графіків рисунка не дозволяє розпізнати, що дрейф трендів векторів  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$  має місце для широкого діапазону координат, і можна розрахувати, що ці середні положення будуть досить сильно корельовані.

Наступний режим прецесії, навпроти, є знову регулярним, хоча і зберігає при цьому деякі властивості попередніх двох режимів. Тут повільний дрейф тренду спостерігається лише для азимутальних кутів векторів  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$ , але при цьому їх полярні кути виконують лише коливання. Дрейф вектора осі анізотропії  $\mathbf{n}$  добре видно з рисунка 3.6, в той час як дрейф магнітного моменту  $\mathbf{m}$  не помітний у масштабі осей на рисунку. Тим не менш, він зобов'язаний існувати через анізотропний зв'язок магнітної та механічної підсистем. Цей режим характерний для резонансних частот та близьких до них. Для приведеної амплітуди поля вибраної на рівні 0.14 він реалізується в діапазоні приведених частот 0.77 – 0.96. Залежності від початкових умов та значення кроку дискретизації за часом не спостерігалися. Таким чином, можна стверджувати, що описаний режим є регулярним.

Характер останніх детектованих режимів генерується завдяки переорієнтації векторів магнітного моменту  $\mathbf{m}$  та осі анізотропії  $\mathbf{n}$  під дією циркулярно поляризованого поля. Незалежно від вибору початкових умов щодо полярних кутів, стабільні режими прецесії для певних значень амплітуд та частот існують лише в околицях прецесійного кута  $\pi$ . Тобто, полярний кут магнітного моменту може подолати шлях, близький до  $\pi$  потягом перехідного процесу задля досягнення стаціонарної траєкторії. І хоч однорідна прецесія тут є стабільною, завдяки надто вузькому конусу прецесії в околі  $\pi$ , вісь анізотропії може досить довго не досягати прецесійної та здійснювати лише коливання, див. Рис. 3.7. Є підстави вважати, що цей режим є перехідним процесом великої тривалості, але з практичної точки зору логічно розглядати такий тип руху як окремий режим. За збільшення частоти зовнішнього поля зазначений перехідний процес завершується швидше і стаціонарний розв'язок являє собою "чистий" режим однорідної



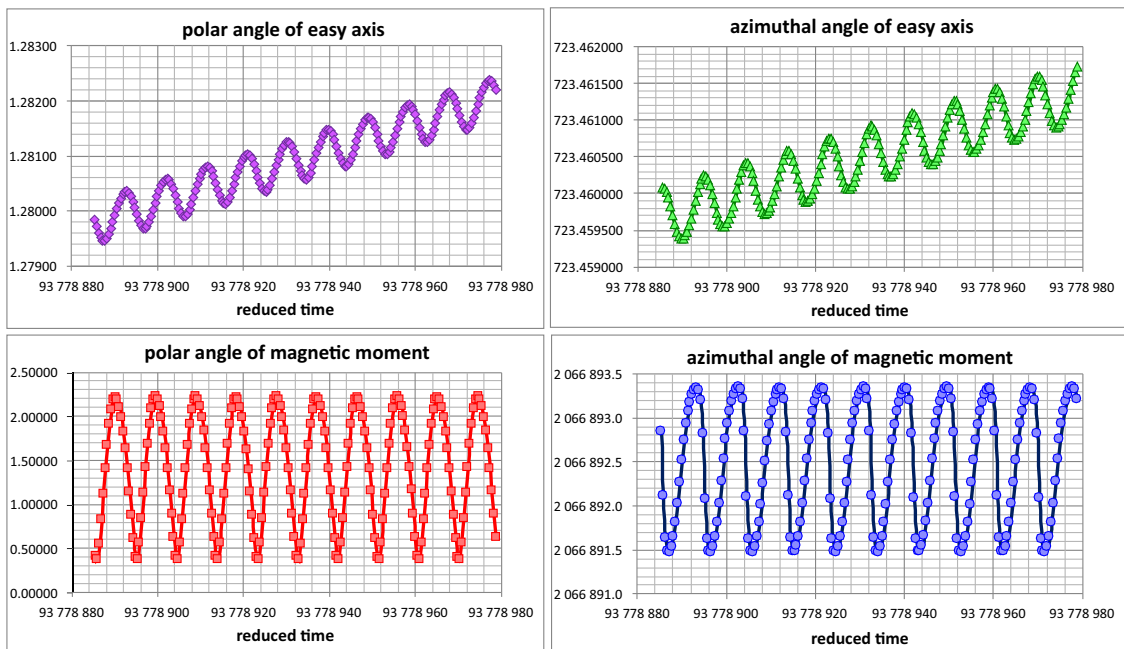


Рисунок 2.5 – Часові залежності кутових координат магнітного моменту та осі анізотропії наночастинки, під дією циркулярно поляризованого поля виду (1.1) з приведеною амплітудою  $h = 0.14$  та приведеною частотою  $\tilde{\Omega} = 0.67$ . Даний режим є хаотичним, оскільки спостерігається повільний хаотичний дрейф усереднених положень (трендів) і магнітного моменту і осі анізотропії.

прецесії, див. Рис. 3.8. Але і в цьому випадку, як і раніше, до прецесії додаються залишкові коливання. Щоправда, тут даний наслідок перехідного процесу на порядок менше виражений. І це ще один аргумент на користь припущення про існування поміжного нелінійного режиму перед звичним лінійним – режимом однорідної прецесії.

Нарешті, останнім спостережуваним прикладом нелінійної поведінки є так званий проміжний або режим вторинної однорідної прецесії. Він генерується завдяки відновленню стійкості після зростання частоти або амплітуди поля. Всі нелінійні режими динаміки виникають внаслідок того, що критерії стійкості для однорідної прецесії перестають бути справедливими в певних інтервалах значень частоти та амплітуди зовнішнього поля. Тому інтервали, де реалізується однорідна прецесія можуть чергуватися з інтервалами різних нелінійних режимів. Подібний ефект для магнітної динаміки фіксованої наночастинки добре відомий і раніше описувався у роботі [65]. Перехід від звичайного прецесійного режиму до вторинного однорідного режиму прецесії відбувається раптово за найменшої зміни параметрів поля поблизу точки переходу. У нашому моделюванні для обраних параметрів

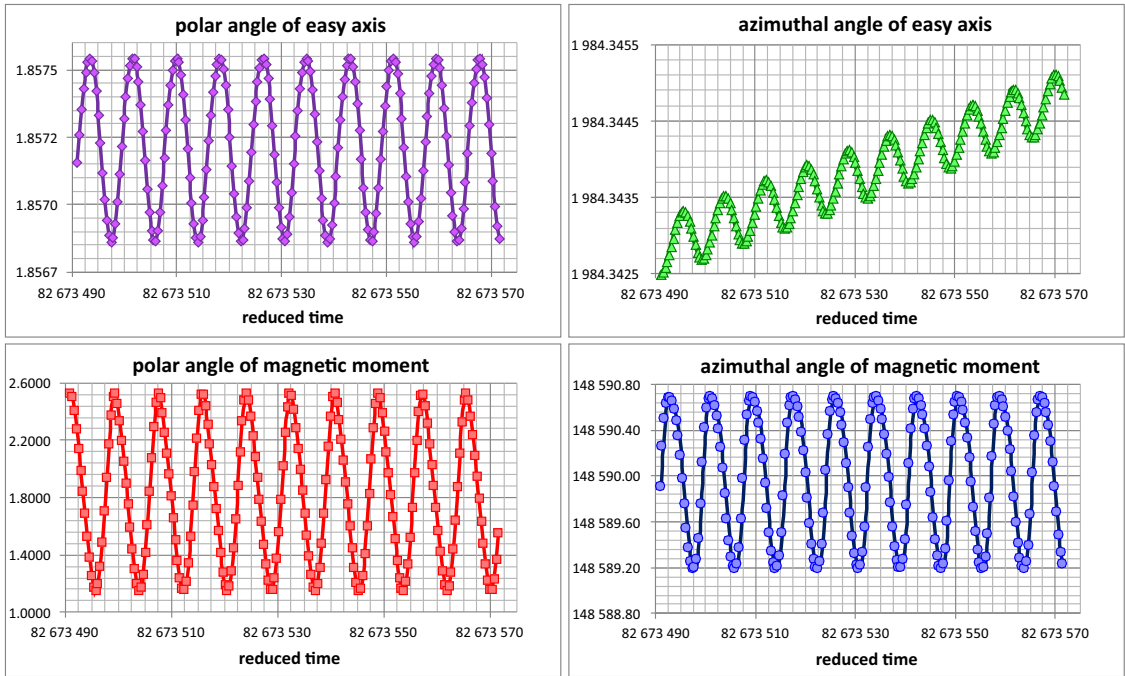


Рисунок 2.6 – Часові залежності куткових координат магнітного моменту та осі анізотропії наночастинки, під дією циркулярно поляризованого поля виду (1.1) з приведеною амплітудою  $h = 0.14$  і приведеною частотою  $\tilde{\Omega} = 0.76$ . Даний режим є регулярним. Повільний дрейф усередненого положення магнітного моменту та осі анізотропії здійснюється лише за азимутальними кутами.

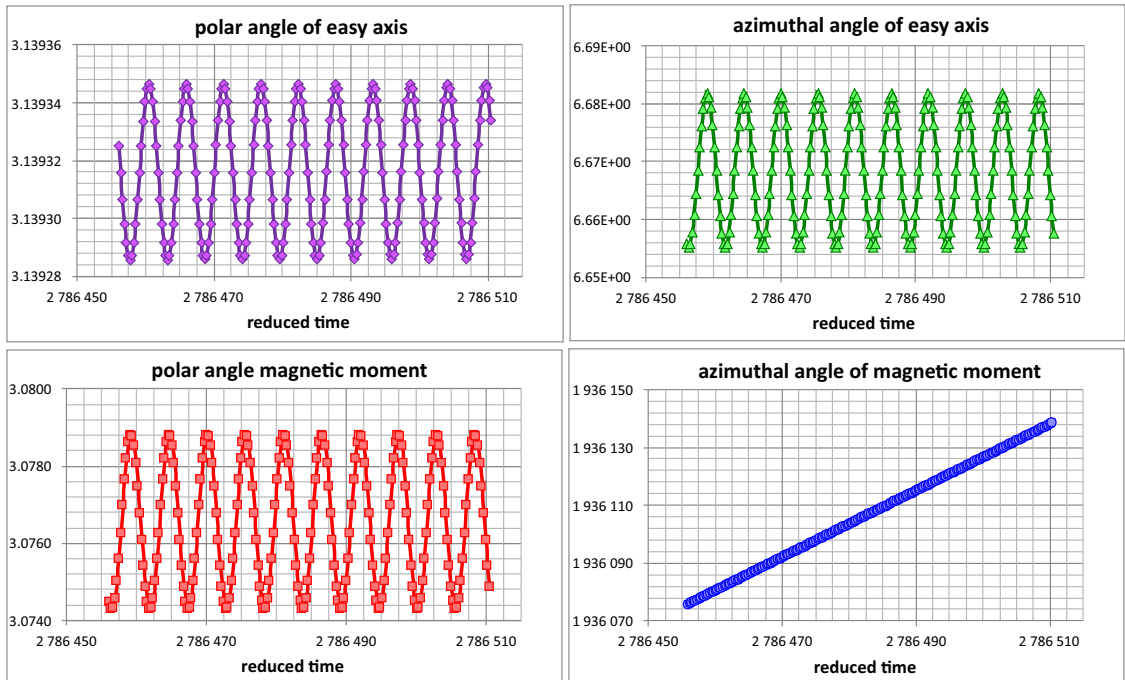


Рисунок 2.7 – Часові залежності куткових координат магнітного моменту та осі анізотропії наночастинки, під дією циркулярно поляризованого поля виду (1.1) з приведеною амплітудою  $h = 0.14$  і приведеною частотою  $\tilde{\Omega} = 1.15$ . Магнітний момент здійснює однорідну прецесію, тоді як легка вісь здійснює лише коливання. Це може бути тривалий перехідний процес.

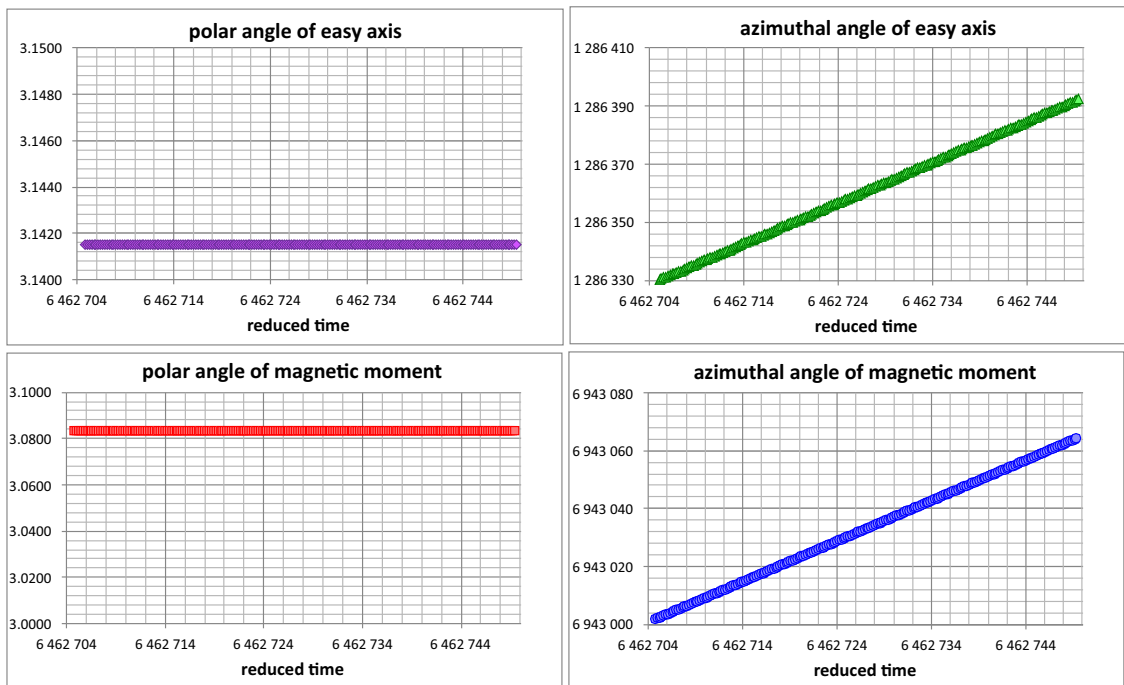


Рисунок 2.8 – Часові еволюції кутових координат наночастинки, збуджуваної обертовим полем виду (1.1) з безрозмірною амплітудою  $h = 0.14$  і безрозмірною частотою  $\tilde{\Omega} = 1.45$ . Магнітний момент та легка вісь здійснюють однорідну прецесію у нижньому стані.

точка переходу знаходиться поблизу від  $h = 0.14$  і  $\tilde{\Omega} = 0.63$ , і даний режим межує також з неоднорідними та хаотичними режимами. Однак також можливий перехід у вторинний однорідний режим із звичайної однорідної прецесії. Такий перехід супроводжується стрибками кутів прецесії.

### 3 КУТОВІ ТРАЄКТОРІЇ ТА ДИСИПАЦІЯ ЕНЕРГІЇ

#### 3.1 Зв'язана динаміка наночастинки, зваженої в рідині, та її магнітного моменту

Коли трансляційний рух наночастинки відсутній, як у випадку фіксованої наночастинки, так і у випадку жорсткого диполя існує два режими сталої динаміки магнітного моменту  $\mathbf{m}$ , індукованих зовнішнім полем вигляду (1.1) [63–65]. Перший режим - це однорідна прецесія, коли магнітний момент (або легка вісь) обертаються слідом за вектором поля з певним сталим кутом відставання та кутом прецесії. Другий режим - це неоднорідна прецесія, за якого магнітний момент обертається з частотою не кратною зовнішній, а кут прецесії зазнає періодичних змін. Є підстави припускати, що подібний стан речей збережеться і у випадку сумісної динаміки магнітного моменту наночастинки та її легкої вісі. Проте, є також і підстави сподіватися на виявлення нових прецесійних режимів, зокрема, хаотичних, як це, наприклад, має місце під час дії лінійно-поляризованого поля на фіксовану наночастинку [56].

То розпочинати варто з перевірки існування найпростішого режиму - режиму однорідної прецесії. Якщо він існує, тоді стаціонарний розв'язок системи рівнянь (1.10), (1.11) можна подати у такій формі  $\varphi = \varrho\Omega t - \varphi_1$ ,  $\vartheta = \vartheta_1$ ,  $\phi = \varrho\Omega t - \phi_1$ ,  $\theta = \theta_1$  (див. Рис. 3.1). Щоб віднайти невідомі константи  $\varphi_1$ ,  $\phi_1$  and  $\vartheta_1$ ,  $\theta_1$ , що репрезентують кути прецесії та відставання, було використано умову відсутності руху магнітного моменту відносно кристалічної решітки наночастинок у вигляді

$$\dot{\mathbf{m}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m} = 0. \quad (3.1)$$

Якщо підставити рівняння (3.1) у друге рівняння системи (1.10) та знехтувати доданком, що відповідає за момент інерції, нескладно отримати

$$0 = \Omega_{cr}(\mathbf{m} \times \mathbf{n})(\mathbf{m}\mathbf{n}) + \boldsymbol{\omega}. \quad (3.2)$$

Далі, коли ввести до розгляду нову координатну систему  $x''y''z''$ , що здійснює обертання разом із зовнішнім полем, як це схематично проілюстровано

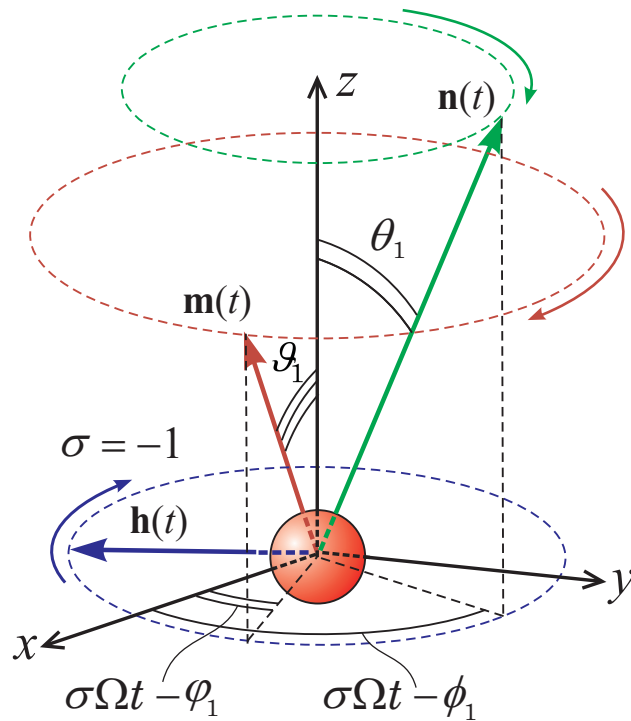


Рисунок 3.1 – Схематичне зображення поведінки векторів  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}$  та систем координат, що використовуються для опису режиму прецесії

но на рисунку 3.1, то подання кутової швидкості буде напрочуд простим

$$\boldsymbol{\omega}'' = (-\varrho\Omega \sin \theta_1, 0, 0). \quad (3.3)$$

Однак це породжує іншу проблему: вираз для динаміки магнітного моменту (1.11) не може бути так само легко поданим у зазначеній новій системі координат. Тому потрібно записати явну форму всіх векторів, що входять у рівняння (1.11) лабораторній системі координат. І складність виникає саме із явним виглядом кутової швидкості, або пошуку нового вигляду (3.3). Для виконання необхідних перетворень використовують матрицю повороту у вигляді

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \Phi_1 & -\sin \Phi_1 & \sin \theta_1 \cos \Phi_1 \\ \cos \theta_1 \sin \Phi_1 & \cos \Phi_1 & \sin \theta_1 \sin \Phi_1 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

де  $\Phi_1 = \varrho\Omega t - \phi_1$ . Далі введемо таке позначення

$$F_1 = \sin \theta_1 \sin \vartheta_1 \cos(\phi_1 - \varphi_1) + \cos \theta_1 \cos \vartheta_1 \quad (3.5)$$

та за його допомогою перепишемо компоненти векторів  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$  в лабораторній системі використовуючи матрицю повороту (3.4). У такий спосіб отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} -\sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 \left( \frac{\varrho \Omega}{\Omega_r} - h_z \right) &= \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \phi_1 \frac{\varrho \Omega}{\Omega_{cr}}, \\ h \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 &= \sin^2 \theta_1 \frac{\varrho \Omega}{\Omega_{cr}}, \\ F_1 \sin(\vartheta_1 - \theta_1) \sin \varphi_1 &= \sin \vartheta_1 \left( \frac{\varrho \Omega}{\Omega_r} - h_z \right), \\ F_1 \sin \theta_1 \sin(\varphi_1 - \phi_1) &= h \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Далі, пряме інтегрування рівнянь (1.4) з врахуванням подання векторів  $\mathbf{m}$  та  $\mathbf{n}$  у сферичних координатах

$$\dot{\mathbf{m}} = (-\varrho \Omega \sin \vartheta_1 \sin \Psi_1, \varrho \Omega \sin \vartheta_1 \cos \Psi_1, 0), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{n} = (\sin \theta_1 \cos \Phi_1, \sin \theta_1 \sin \Phi_1, \cos \theta_1), \quad (3.8)$$

де  $\Psi_1 = \varrho \Omega t - \varphi_1$ , отримуємо вираз для потужності втрат для режиму однорідної прецесії

$$\tilde{Q} = 2\varrho \tilde{\Omega} \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1. \quad (3.9)$$

Тут,  $\tilde{\Omega} = \Omega / \Omega_{r1}$ .

Вираз для чисельного обчислення втрат потужності, який дозволить верифікувати аналітичні розрахунки (3.9) отримується також з використанням співвідношення (1.4) та подання векторів  $\mathbf{m}$  and  $\mathbf{n}$  у сферичних координатах. Введемо параметр  $\tilde{\tau} = \tau \Omega_{r1}$  (який потім буде вибраний як  $10^5$  під час моделювання) і перепишемо виразі для компонент поля в дискретні моменти часу, або у вигляді так званої різничної схеми

$$\begin{aligned} \tilde{Q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ h_{xi} (\cos \vartheta_i \cos \varphi_i \Delta \vartheta_i - \sin \vartheta_i \sin \varphi_i \Delta \phi_i) \right. \\ \left. + h_{yi} (\cos \vartheta_i \sin \varphi_i \Delta \theta_i + \sin \vartheta_i \cos \varphi_i \Delta \varphi_i) \right. \\ \left. - h_{zi} \sin \vartheta_i \Delta \vartheta_i \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

де  $N = \tilde{\tau} / \Delta \tilde{t}$  – кількість часових кроків на один періоді зовнішнього поля,

$\Delta\tilde{t}(\ll 1/\tilde{\Omega})$  – значення кроку часу в процедурі чисельного розрахунку,  $\vartheta_i = \vartheta(\tilde{t}_i)$ ,  $\varphi_i = \varphi(\tilde{t}_i)$ ,  $\Delta\vartheta_i = \frac{\partial\vartheta(\tilde{t}_i)}{\partial\tilde{t}}\Delta\tilde{t}$ ,  $\Delta\varphi_i = \frac{\partial\varphi(\tilde{t}_i)}{\partial\tilde{t}}\Delta\tilde{t}$ ,

$$\begin{aligned} h_{xi} &= h \cos(\varrho\tilde{\Omega}\tilde{t}_i) + F_i \sin\theta_i \cos\phi_i, \\ h_{yi} &= h \sin(\varrho\tilde{\Omega}\tilde{t}_i) + F_i \sin\theta_i \sin\phi_i, \\ h_{zi} &= h_z + F_i \cos\theta_i, \end{aligned} \tag{3.11}$$

тут  $F_i = F(\tilde{t}_i)$ ,  $\theta_i = \theta(\tilde{t}_i)$ ,  $\phi_i = \phi(\tilde{t}_i)$ .

Наявність додаткового ступеня вільності забезпечує більш цікавий та складний характер магнітної динаміки наночастинки. По-перше, як і для моделей фіксованої наночастинки, так і для моделі жорсткого диполя, для випадку наночастинки зі скінченною анізотропією буде формуватися звичайний неоднорідний або квазіперіодичний режим, який характеризується змінами кутів прецесії з частотою, що не кратна частоті поля. Такий тип руху ще називають або нутаціями. По-друге, як і у випадку фіксованої наночастинки, може відбуватися т.з. перемикання між двома однорідними режимами, що характеризується різними орієнтаціями напрямку її магнітного моменту. На додачу, реалізується ще один цікавий режим. коли він реалізується, наночастинка як ціле майже не рухається, тоді як магнітний момент здійснює коливання: кути  $\vartheta$  і  $\varphi$  вектора  $\mathbf{m}$  змінюються синхронно разом із зовнішнім полем без постійної складової, що може бути виявленою, кути ж  $\theta$  і  $\phi$  вектора  $\mathbf{n}$  при цьому практично дорівнюють константам, з незначним результуючим рухом в напрямку обертання зовнішнього поля. Такий тип руху досить поширений і реалізується в широкому діапазоні параметрів поля. Він виникає і в нижньому, і у верхньому положенні наночастинки, і в околі площини поляризації зовнішньої поля. Переходи між зазначеними типами руху проявляються у стрибкоподібних змінах залежності потужності втрат  $\tilde{Q}(\tilde{\Omega})$ . Так, наприклад, перемикання між двома однорідними режимами з переорієнтацією наночастинок призводить до зменшення втрат потужності, щонайменше, на один порядок. Найбільш типові залежності  $\tilde{Q}(\tilde{\Omega})$  показані на рисунку 3.2.

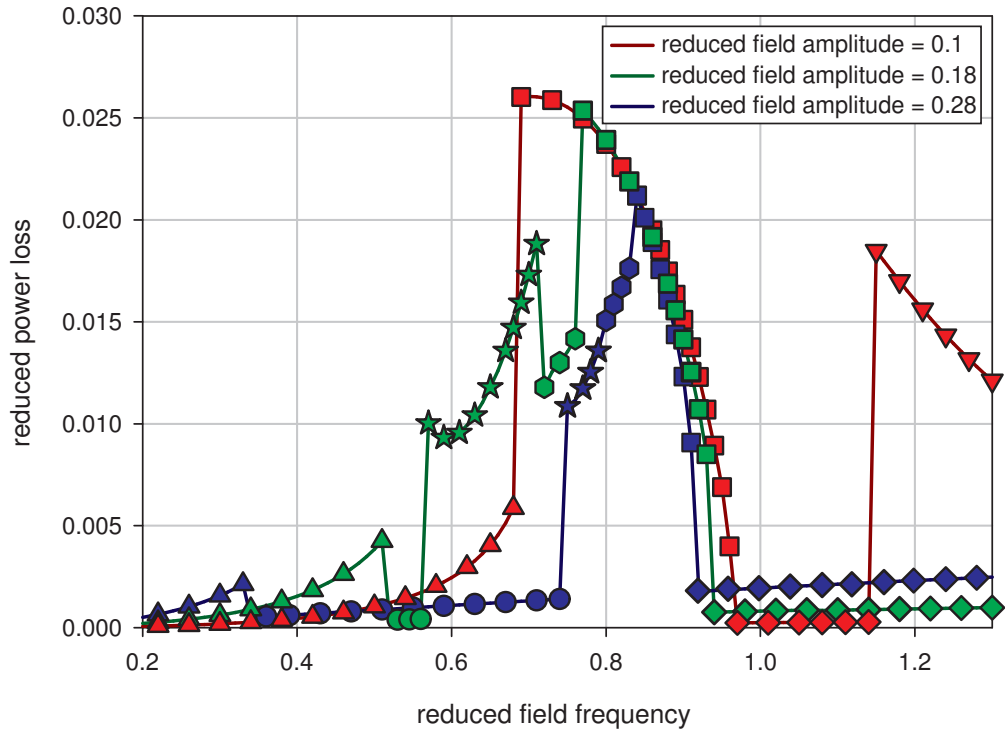


Рисунок 3.2 – Нагрівання наночастинок: типові залежності величини втрат потужності від частоти поля для визначених амплітуд. Значення параметрів системи наступні:  $\alpha = 0.1$ ,  $\eta = 0.006P$ ,  $M = 338G$ ,  $\varrho = +1$ ,  $h_z = 0$ . Чисельні розрахунки у вибраному діапазоні параметрів поля не залежать від початкових умов моделювання. Трикутними маркерами відмічені ділянки, що репрезентують однорідну прецесію у верхньому стані; круглими маркерами відмічені ділянки, що репрезентують однорідну прецесію після переходу в нижній стан; маркери-зірки репрезентують ділянки з неоднорідною прецесією; квадратні, шестикутні та трикутні маркери репрезентують неоднорідний режим з "нерухомою" легкою віссю.



### 3.2 Режими прецесійного руху для наночастинки зі скінченною анізотропією

Як кути прецесії, так і кути відставання зростають з частотою та амплітудою зовнішнього поля. Тому однорідна прецесія, яка генерується для малих частот та порівняно малих амплітуд має втрачати стабільний характер. І реалізується механізм, який можна вербалізувати так. Магнітний момент  $\mathbf{m}$  намагається наздогнати вектор зовнішнього поля  $\mathbf{h}$ , як наслідок, виходить за межі конусу прецесії та починає виконувати коливання змінюючи кут прецесії періодично. Ці коливання мають досить велику амплітуду, і вони відбуваються асинхронно із обертанням зовнішнього поля. У випадку фіксованої наночастинки подібне явище детально описувалось у роботі [65], а умови генерації такого режиму також детально пояснені у [63]. Для моделі ж жорсткого диполя такий режим вичерпано охарактеризований у роботі [66]. Якщо ж і вісь анізотропії, і магнітний момент не фіксовані жорстко та можуть здійснювати сумісний рух, неоднорідний режим реалізується з деякими особливостями. По-перше, для реальних значень параметрів системи, амплітуди коливань легкої осі та середнє значення її положення значно менші, ніж для магнітного моменту  $\mathbf{m}$ . По-друге, як видно з масштабів (див. Рис. 3.3), частота обертання вісі анізотропії  $\mathbf{n}$  менша, ніж для  $\mathbf{m}$ . Різні частоти обертання намагніченості та легкої вісі наночастинки в неоднорідному режимі є нетривіальним результатом, оскільки у випадку однорідної прецесії дані частоти цілком збігаються.

З подальшим збільшенням частоти поля середнє положення вектора магнітного моменту  $\mathbf{n}$  починає зміщуватися, або дрейфувати за полем, що може відбуватися по-різному. Завдяки анізотропії вектор  $\mathbf{m}$  також буде брати участь у такому дрейфі. Перший сценарій дрейфу є хаотичним, за якого і середнє положення кожного вектору, і коливання навколо середніх положень векторів будуть нерегулярними. Зауважимо, що При цьому для кожного вектору швидкість дрейфу середнього положення є набагато меншою порівняно з частотою коливань навколо цього положення. Саме такий прецесійний режим показаний на рисунку (3.4). Тут порушення регулярного характеру руху особливо виражене для азимутального кута  $\varphi$  магнітного моменту  $\mathbf{m}$ . Зауважимо, що подібну хаотичну динаміку раніше спостерігали у чисельних дослідженнях для внутрішньої магнітної динамі-

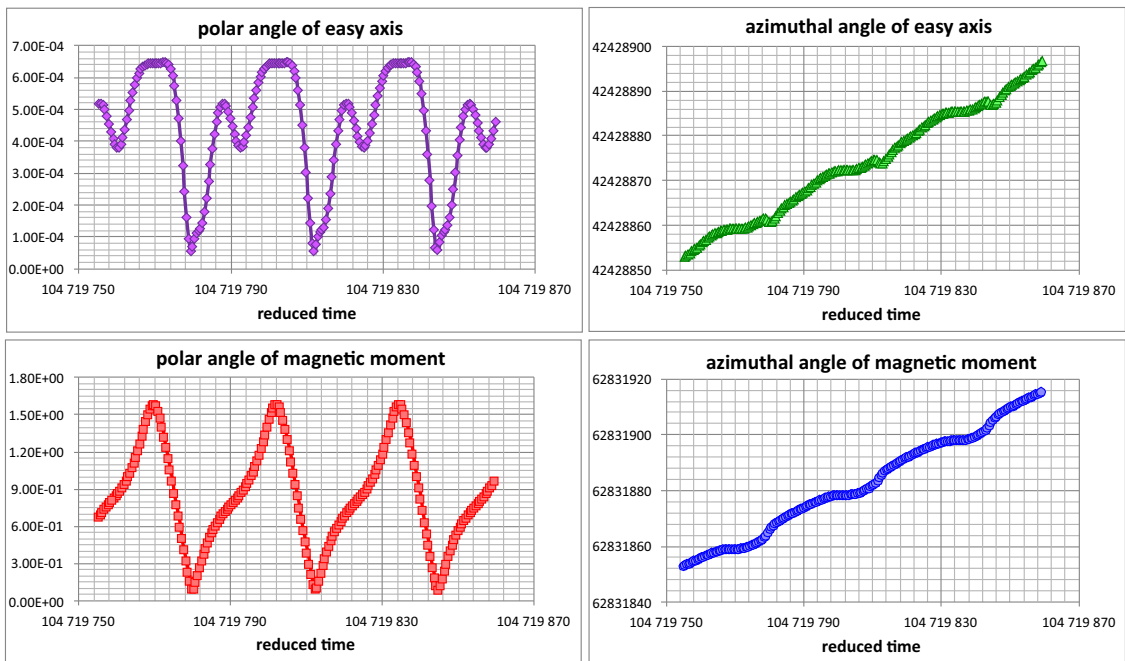


Рисунок 3.3 – Часові залежності кутових координат магнітного моменту та осі анізотропії наночастинки, під дією циркулярно поляризованого поля виду (1.1) з приведеною амплітудою  $h = 0.14$  і приведеною амплітудою частотою  $\tilde{\Omega} = 0.6$ . Частоти обертання для магнітного моменту та легкої осі відрізняються між собою та не є кратними, що видно з масштабів вертикальних осей графіків праворуч.

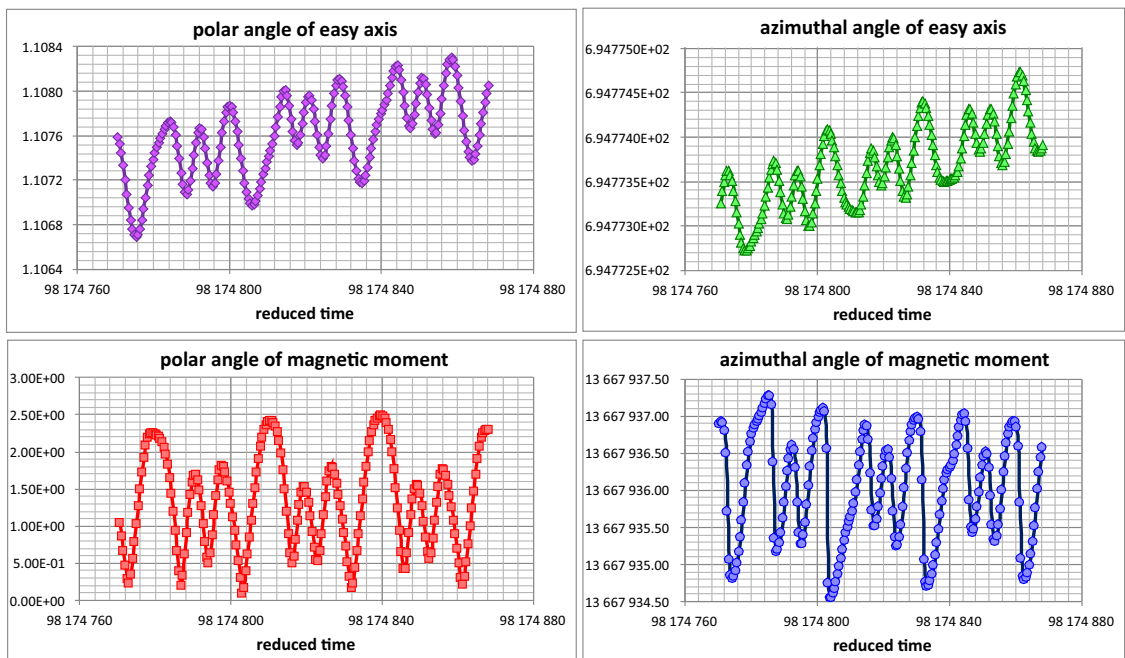


Рисунок 3.4 – Часові залежності кутових координат магнітного моменту та осі анізотропії наночастинки, під дією циркулярно поляризованого поля виду (1.1) з приведеною амплітудою  $h = 0.14$  і приведеною частотою  $\tilde{\Omega} = 0.64$ . Цей режим є виключно хаотичним через повільний хаотичний дрейф усереднених положень і магнітного моменту, і осі анізотропії, а також, через нерегулярні коливання магнітного моменту навколо осі анізотропії.

ки фіксованої наночастинки, (див. роботи [67–69]).

Під час зростання частоти відбувається наступна трансформація характеру руху. І далі тренди або середні положення векторів  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$  залишаються хаотичними, але коливання стають практично регулярними, а їх частоти збігаються з частотою поля, див. Рис. 3.5. Нажаль, масштаб графіків рисунка не дозволяє розпізнати, що дрейф трендів векторів  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$  має місце для широкого діапазону координат, і можна розрахувати, що ці середні положення будуть досить сильно корельовані.

Наступний режим прецесії, напроти, є знову регулярним, хоча і зберігає при цьому деякі властивості попередніх двох режимів. Тут повільний дрейф тренду спостерігається лише для азимутальних кутів векторів  $\mathbf{m}$  і  $\mathbf{n}$ , але при цьому їх полярні кути виконують лише коливання. Дрейф вектора осі анізотропії  $\mathbf{n}$  добре видно з рисунка 3.6, в той час як дрейф магнітного моменту  $\mathbf{m}$  не помітний у масштабі осей на рисунку. Тим не менш, він зобов'язаний існувати через анізотропний зв'язок магнітної та механічної підсистем. Цей режим характерний для резонансних частот та близьких до них. Для приведеної амплітуди поля вибраної на рівні 0.14 він реалізується в діапазоні приведених частот 0.77 – 0.96. Залежності від початкових умов та значення кроку дискретизації за часом не спостерігалися. Таким чином, можна стверджувати, що описаний режим є регулярним.

Характер останніх детектованих режимів генерується завдяки переорієнтації векторів магнітного моменту  $\mathbf{m}$  та осі анізотропії  $\mathbf{n}$  під дією циркулярно поляризованого поля. Незалежно від вибору початкових умов щодо полярних кутів, стабільні режими прецесії для певних значень амплітуд та частот існують лише в околицях прецесійного кута  $\pi$ . Тобто, полярний кут магнітного моменту може подолати шлях, близький до  $\pi$  потягом перехідного процесу задля досягнення стаціонарної траєкторії. І хоч однорідна прецесія тут є стабільною, завдяки надто вузькому конусу прецесії в околі  $\pi$ , вісь анізотропії може досить довго не досягати прецесійної та здійснювати лише коливання, див. Рис. 3.7. Є підстави вважати, що цей режим є перехідним процесом великої тривалості, але з практичної точки зору логічно розглядати такий тип руху як окремий режим. За збільшення частоти зовнішнього поля зазначений перехідний процес завершується швидше і стаціонарний розв'язок являє собою "чистий" режим однорідної

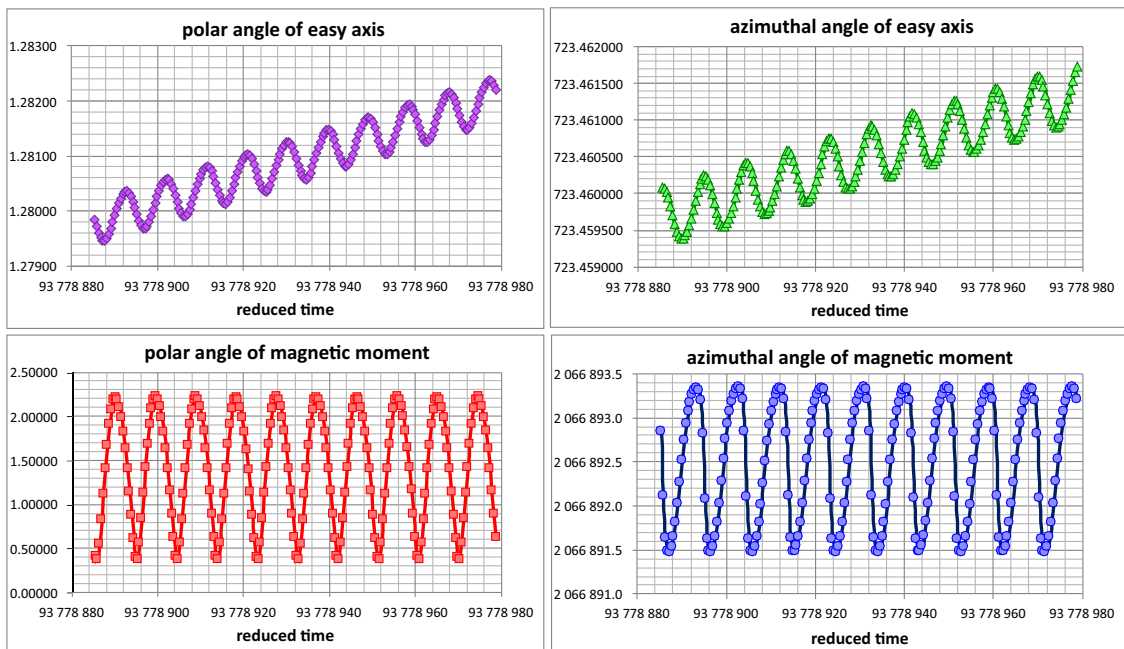


Рисунок 3.5 – Часові залежності кутових координат магнітного моменту та осі анізотропії наночастинки, під дією циркулярно поляризованого поля виду (1.1) з приведеною амплітудою  $h = 0.14$  та приведеною частотою  $\tilde{\Omega} = 0.67$ . Даний режим є хаотичним, оскільки спостерігається повільний хаотичний дрейф усереднених положень (трендів) і магнітного моменту і осі анізотропії.

прецесії, див. Рис. 3.8. Але і в цьому випадку, як і раніше, до прецесії додаються залишкові коливання. Щоправда, тут даний наслідок перехідного процесу на порядок менше виражений. І це ще один аргумент на користь припущення про існування поміжного нелінійного режиму перед звичним лінійним – режимом однорідної прецесії.

Нарешті, останнім спостережуваним прикладом нелінійної поведінки є так званий проміжний або режим вторинної однорідної прецесії. Він генерується завдяки відновленню стійкості після зростання частоти або амплітуди поля. Всі нелінійні режими динаміки виникають внаслідок того, що критерії стійкості для однорідної прецесії перестають бути справедливими в певних інтервалах значень частоти та амплітуди зовнішнього поля. Тому інтервали, де реалізується однорідна прецесія можуть чергуватися з інтервалами різних нелінійних режимів. Подібний ефект для магнітної динаміки фіксованої наночастинки добре відомий і раніше описувався у роботі [65]. Перехід від звичайного прецесійного режиму до вторинного однорідного режиму прецесії відбувається раптово за найменшої зміни параметрів поля поблизу точки переходу. У нашому моделюванні для обраних параметрів

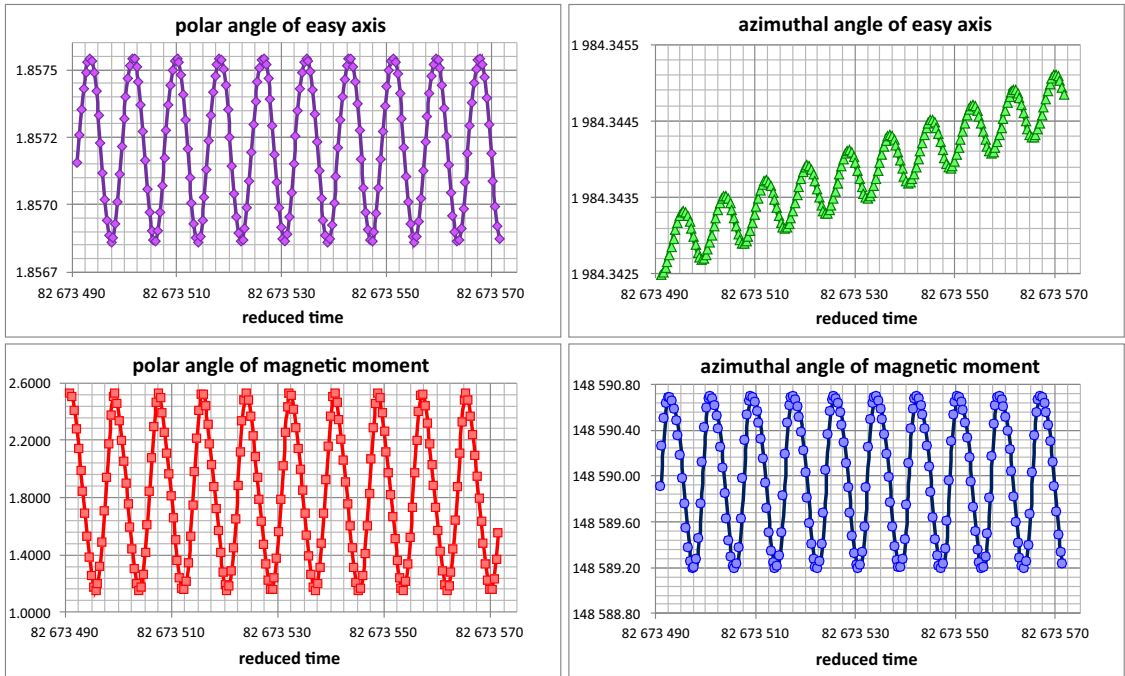


Рисунок 3.6 – Часові залежності кутових координат магнітного моменту та осі анізотропії наночастинки, під дією циркулярно поляризованого поля виду (1.1) з приведеною амплітудою  $h = 0.14$  і приведеною частотою  $\tilde{\Omega} = 0.76$ . Даний режим є регулярним. Повільний дрейф усередненого положення магнітного моменту та осі анізотропії здійснюється лише за азимутальними кутами.

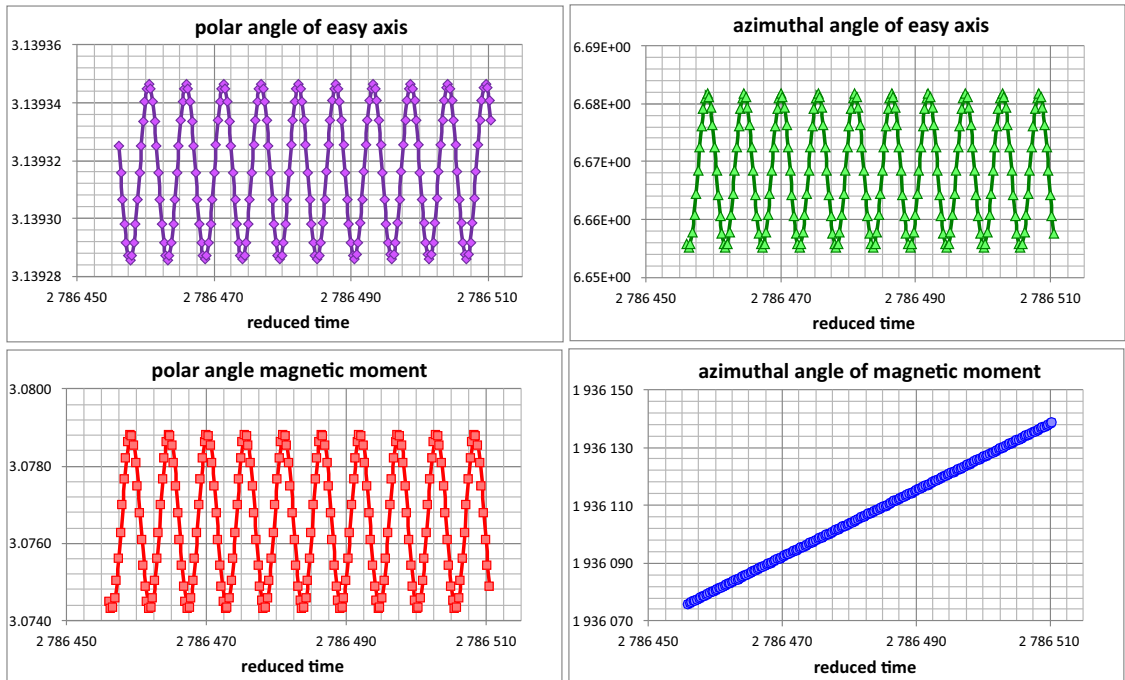


Рисунок 3.7 – Часові залежності кутових координат магнітного моменту та осі анізотропії наночастинки, під дією циркулярно поляризованого поля виду (1.1) з приведеною амплітудою  $h = 0.14$  і приведеною частотою  $\tilde{\Omega} = 1.15$ . Магнітний момент здійснює однорідну прецесію, тоді як легка вісь здійснює лише коливання. Це може бути тривалий перехідний процес.

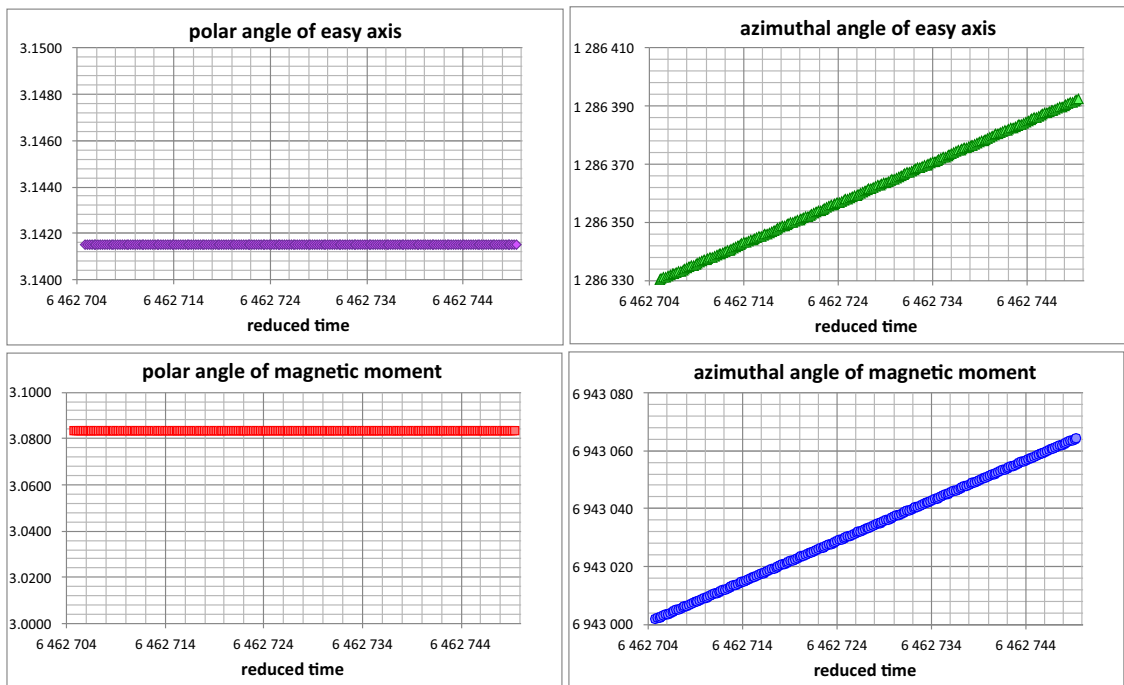


Рисунок 3.8 – Часові еволюції кутових координат наночастинки, збуджуваної обертовим полем виду (1.1) з безрозмірною амплітудою  $h = 0.14$  і безрозмірною частотою  $\tilde{\Omega} = 1.45$ . Магнітний момент та легка вісь здійснюють однорідну прецесію у нижньому стані.

точка переходу знаходиться поблизу від  $h = 0.14$  і  $\tilde{\Omega} = 0.63$ , і даний режим межує також з неоднорідними та хаотичними режимами. Однак також можливий перехід у вторинний однорідний режим із звичайної однорідної прецесії. Такий перехід супроводжується стрибками кутів прецесії.

## 4 ДИНАМІКА ФЕРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК У ГРАДІЄНТОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ, ЩО ЗМІНЮЄТЬСЯ З ЧАСОМ ЗА ГАРМОНІЧНИМ ЗАКОНОМ

### 4.1 Фізична модель та рівняння балансу

В моделі, яка буде використовуватись в цьому та наступному розділах, припускається, що феромагнітні наночастинки є сферичними (з радіусом  $a$ ), однодоменними (тобто їх радіус менший критичного [70]) та невзаємодіючими (тобто середня відстань між наночастинками суттєво перевищує їх розмір). Якщо поле магнітної анізотропії в одноосних наночастинках значно більше, ніж зовнішні магнітні поля, тоді можна вважати, що напрямок намагніченості  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t)$  ( $|\mathbf{M}| = M = \text{const}$ ) в кожній частинці співпадає з напрямком осі анізотропії. В цій моделі, коли феромагнітні наночастинки розглядаються як жорсткі диполі, динаміка намагніченості і обертання наночастинки пов'язані кінематичним рівнянням

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}, \quad (4.1)$$

де  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$  – кутова швидкість частинки, а символ  $\times$  позначає векторний добуток.

Градiєнтне магнітне поле  $\mathbf{H}_g$ , що змінюється з часом за гармонічним законом, та статичне однорідне магнітне поле  $\mathbf{H}$  обираються у вигляді

$$\mathbf{H}_g = gx \sin(\Omega t + \phi) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{H} = H_{\parallel} \mathbf{e}_x + H_{\perp} \mathbf{e}_y. \quad (4.2)$$

Тут  $g(> 0)$ ,  $\Omega$  і  $\phi \in [0, \pi]$  – градієнт, кутова частота та початкова фаза градієнтного поля  $\mathbf{H}_g$ , відповідно,  $H_{\parallel}$  і  $H_{\perp} (\geq 0)$  – напруженості паралельної і перпендикулярної компонент однорідного поля  $\mathbf{H}$ , а  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  і  $\mathbf{e}_z$  – одиничні вектори вздовж осей  $x$ ,  $y$  і  $z$  декартової системи координат  $xyz$ . Той факт, що результуюче магнітне поле  $\mathbf{H}_g + \mathbf{H}$  лежить в площині  $xy$ , дозволяє представити намагніченість наночастинки у вигляді

$$\mathbf{M} = M(\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y), \quad (4.3)$$

де  $\varphi = \varphi(t) \in [0, \pi]$  – азимутальний кут вектора  $\mathbf{M}$ .

Оскільки радіус однодоменних наночастинок досить малий, при формулюванні рівнянь їх руху будемо нехтувати інерційними доданками. У цьому випадку динамічні рівняння руху наночастинок у в'язкій рідині зводяться до рівняння балансу сил,  $\mathbf{f}_d + \mathbf{f}_f = 0$ , і рівняння балансу моментів,  $\mathbf{t}_d + \mathbf{t}_f = 0$ , що діють на частинку з боку магнітних полів та рідини. Тут  $\mathbf{f}_d$  і  $\mathbf{t}_d$  – рушійна сила і рушійний обертальний момент, що породжуються градієнтним та однорідним магнітними полями, а  $\mathbf{f}_f$  і  $\mathbf{t}_f$  – сила тертя і момент тертя, що виникають внаслідок взаємодії наночастинок з в'язкою рідиною.

Рушійний момент  $\mathbf{t}_d$  і рушійна сила  $\mathbf{f}_d$  визначаються наступним чином:  $\mathbf{t}_d = V\mathbf{M} \times (\mathbf{H}_g + \mathbf{H})|_{x=R_x}$  і  $\mathbf{f}_d = V(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H}_g|_{x=R_x}$ , де  $V = 4\pi a^3/3$  – об'єм частинки,  $\nabla$  – векторний диференціальний оператор набла,  $R_x = R_x(t)$  –  $x$ -компонента центру частинки, а символ  $\cdot$  позначає скалярний добуток векторів. Використовуючи формули (4.2) та (4.3), неважко показати, що  $\mathbf{t}_d = t_d \mathbf{e}_z$ , де

$$t_d = MV[H_{\perp} \cos \varphi - H_{\parallel} \sin \varphi - gR_x \sin \varphi \sin(\Omega t + \phi)], \quad (4.4)$$

і  $\mathbf{f}_d = f_d \mathbf{e}_x$ , де

$$f_d = MVg \cos \varphi \sin(\Omega t + \phi). \quad (4.5)$$

Для знаходження моменту тертя  $\mathbf{t}_f$  і сили тертя  $\mathbf{f}_f$  будемо вважати, що обертальні та поступальні числа Рейнольдса,  $Re_{\omega} = \rho a^2 |\boldsymbol{\omega}| / \eta$  та  $Re = 2\rho a |\mathbf{V}| / \eta$ , є малими у порівнянні з одиницею (внаслідок малого розміру наночастинок ці умови не є занадто обмежувальними). Тут  $\rho$  позначає щільність рідини,  $\eta$  – динамічну в'язкість рідини, а  $\mathbf{V} = (dR_x/dt)\mathbf{e}_x$  – поступальну швидкість частинки. Згідно з [?], в цьому випадку  $\mathbf{t}_f = -6\eta V \boldsymbol{\omega}$  і  $\mathbf{f}_f = -6\pi\eta a \mathbf{V}$ . Тому, використовуючи (4.4) і (4.5), із рівняння балансу моментів отримуємо  $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{e}_z$ , де

$$\omega_z = \frac{M}{6\eta} [H_{\perp} \cos \varphi - H_{\parallel} \sin \varphi - gR_x \sin \varphi \sin(\Omega t + \phi)], \quad (4.6)$$



а рівняння балансу сил зводиться до

$$\frac{d}{dt}R_x = \frac{2Mga^2}{9\eta} \cos \varphi \sin (\Omega t + \phi). \quad (4.7)$$

Нарешті, приймаючи до уваги співвідношення  $\omega_z = d\varphi/dt$ , яке впливає з (4.1) і (4.3), після введення безрозмірного часу  $\tau = \Omega t$  і безрозмірної координати частинки  $r_x = R_x/a$ , рівняння (4.6) та (4.7) можуть бути записані у безрозмірному вигляді

$$\dot{\varphi} = \nu_{\perp} \cos \varphi - \nu_{\parallel} \sin \varphi - \nu_g r_x \sin \varphi \sin (\tau + \phi) \quad (4.8)$$

та

$$\dot{r}_x = \frac{4}{3}\nu_g \cos \varphi \sin (\tau + \phi), \quad (4.9)$$

відповідно. Тут крапка над  $\varphi$  і  $r_x$  позначає похідну за безрозмірним часом  $\tau$ , а безрозмірні характерні частоти

$$\nu_{\perp} = \frac{MH_{\perp}}{6\eta\Omega}, \quad \nu_{\parallel} = \frac{MH_{\parallel}}{6\eta\Omega}, \quad \nu_g = \frac{Mga}{6\eta\Omega} \quad (4.10)$$

враховують вплив однорідного ( $\nu_{\perp}$ ,  $\nu_{\parallel}$ ) та градієнтного ( $\nu_g$ ) магнітних полів. Зазначимо, що рівняння (4.8) та (4.9) узагальнюють відповідні рівняння, отримані в [?] для випадку постійного градієнтного магнітного поля.

Рівняння (4.8) і (4.9) разом із початковими умовами  $\varphi(0) = \varphi_0 \in [0, \pi]$  та  $r_x(0) = r_{x0} \in (-\infty, \infty)$  описують спільну обертальну і поступальну динаміку наночастинок. Як видно із цих рівнянь, градієнтне магнітне поле безпосередньо впливає як на обертальний, так і поступальний рухи наночастинок. В той же час однорідне магнітне поле безпосередньо впливає лише на їх обертальний рух. Незважаючи на це однорідне поле може (оскільки існує динамічний зв'язок між  $\varphi$  і  $r_x$ ) якісно змінювати поступальну динаміку наночастинок (див. розділ 5.1).

Зазначимо також, що система зв'язаних диференціальних рівнянь першого порядку (4.8) і (4.9) може бути зведена до двох незв'язаних рівняння для  $\varphi$  і  $r_x$ . Поклавши для спрощення  $\nu_{\parallel} = 0$ , після обчислення похідної  $\dot{r}_x$  із (4.8) і її підстановки в (4.9) отримуємо диференціальне рівняння

другого порядку для кута намагніченості

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi} [\nu_{\perp} - \sin \varphi \cot (\tau + \phi)] \\ & - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \nu_{\perp} \sin \varphi \cos \varphi \cot (\tau + \phi) \\ & + \frac{4}{3} \nu_g^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin^2 (\tau + \phi) = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

розв'язок якого має задовольняти початковим умовам

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \nu_{\perp} \cos \varphi_0 - \nu_g r_{x0} \sin \varphi_0 \sin \phi. \quad (4.12)$$

Аналогічно можна показати, що безрозмірна координата наночастинки описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$\begin{aligned} & \ddot{r}_x + \dot{r}_x [\nu_{\perp} \sin \varphi - \cot (\tau + \phi)] \\ & - \frac{4}{3} \nu_g^2 r_x \sin^2 \varphi \sin^2 (\tau + \phi) = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

де

$$\sin \varphi = \left[ 1 - \left( \frac{3\dot{r}_x}{4\nu_g \sin (\tau + \phi)} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.14)$$

а початкові умови мають вигляд

$$r_x(0) = r_{x0}, \quad \dot{r}_x(0) = \frac{4}{3} \nu_g \cos \varphi_0 \sin \phi. \quad (4.15)$$

Підкреслимо ще раз, що наведені вище рівняння руху описують обертовий та поступальний рухи невзаємодіючих наночастинки. Тому ці рівняння застосовні тільки у випадку, коли середня відстань  $\lambda$  між наночастинками значно перевищує їх діаметр  $d = 2a$ :  $\lambda \gg d$ . Оскільки концентрація наночастинок  $c$  пропорційна  $\lambda^{-3}$ , остання умова може бути переписана у вигляді  $c \ll d^{-3}$ .

## 4.2 Динаміка наночастинок при $\nu_{\perp} = 0$ і $\nu_{\parallel} = 0$

Слід зазначити, що рівняння (4.8) та (4.9) з  $\nu_{\perp} = 0$  і  $\nu_{\parallel} = 0$  є окремим випадком рівнянь, використаних Массерою виключно для ілюстрації своєї теореми про існування періодичних розв'язків двовимірних звичай-

них диференціальних рівнянь з періодичними правими частинами [?]. Тут же ми розв'язуємо ці рівняння як аналітично, так і чисельно при різних умовах. Крім цього, на відміну від ілюстративних рівнянь Массери, кожне з рівнянь (4.8) і (4.9) має чіткий фізичний зміст.

#### 4.2.1 Окремі аналітичні розв'язки

Система рівнянь (4.8) і (4.9) при  $\nu_{\perp} = \nu_{\parallel} = 0$  описує обертальну та поступальну динаміку наночастинок у в'язкій рідині при умові, коли однорідне магнітне поле відсутнє. За цієї умови зазначені рівняння можуть бути легко розв'язані, якщо  $\varphi_0 = 0$  або  $\varphi_0 = \pi$ . Шляхом прямого інтегрування для першого і другого випадку знаходимо

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad r_x &= r_{x0} + \frac{4}{3}\nu_g f(\tau), \\ \varphi = \pi, \quad r_x &= r_{x0} - \frac{4}{3}\nu_g f(\tau), \end{aligned} \quad (4.16)$$

де

$$f(\tau) = \cos \phi - \cos(\tau + \phi). \quad (4.17)$$

#### 4.2.2 Деякі точні співвідношення

Якщо  $\varphi_0 \neq 0, \pi$ , розв'язати систему рівнянь (4.8) і (4.9) аналітично ми не зуміли. Однак у цьому випадку можна встановити деякі точні співвідношення між  $\varphi$  та  $r_x$ . Для того щоб знайти їх, перепишемо спочатку ці рівняння у вигляді

$$\frac{d}{d\tau} \ln \sin \varphi = -\nu_g r_x \cos \varphi \sin(\tau + \phi) \quad (4.18)$$

та

$$\frac{d}{d\tau} r_x^2 = \frac{8}{3}\nu_g r_x \cos \varphi \sin(\tau + \phi). \quad (4.19)$$

Далі, розділивши (4.18) на (4.19), отримуємо рівняння

$$\frac{d}{d\tau} \left( \ln \sin \varphi + \frac{3}{8} r_x^2 \right) = 0, \quad (4.20)$$

яке після інтегрування по  $\tau$  від 0 до  $\tau$  дає алгебраїчне співвідношення

$$\ln \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} + \frac{3}{8}(r_x^2 - r_{x0}^2) = 0, \quad (4.21)$$

що буде використано далі.

Друге співвідношення ми отримаємо, розділивши рівняння (4.8) на  $\sin \varphi$  та проінтегрувавши його обидві сторони від 0 до  $\tau$ . Скориставшись стандартним інтегралом

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad (4.22)$$

та позначенням

$$Y(\tau) = \nu_g \int_0^\tau r_x(\tau') \sin(\tau' + \phi) d\tau', \quad (4.23)$$

знаходимо

$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi_0 + \tanh Y(\tau)}{1 + \cos \varphi_0 \tanh Y(\tau)}. \quad (4.24)$$

Далі, після множення рівняння (4.9) на  $r_x$ , підстановки в нього формули (4.24) і інтегрування від 0 до  $\tau$ , отримуємо

$$r_x^2 - r_{x0}^2 = \frac{8}{3} \int_0^{Y(\tau)} \frac{\cos \varphi_0 + \tanh Y}{1 + \cos \varphi_0 \tanh Y} dY. \quad (4.25)$$

Нарешті, використовуючи стандартний інтеграл

$$\int \frac{\cos \varphi_0 + \tanh x}{1 + \cos \varphi_0 \tanh x} dx = \ln \cosh \left( x - \ln \tan \frac{\varphi_0}{2} \right), \quad (4.26)$$

співвідношення (4.21) може бути записано у вигляді

$$r_x^2 - r_{x0}^2 = \frac{8}{3} \ln \frac{\cosh \left( Y(\tau) - \ln \tan \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\cosh \left( \ln \tan \frac{\varphi_0}{2} \right)}. \quad (4.27)$$

Простий аналіз показує, що асимптотичний ріст функції  $|Y(\tau)|$  і, отже, правої частини (4.27) не може відбуватися швидше, ніж  $\sim \tau$ . З іншого боку, якщо існує дрейфовий рух наночастинок з деякою середньою швидкістю, тоді  $r_x^2(\tau) \sim \tau^2$  при  $\tau \rightarrow \infty$  (див. також розділ 5.1). Ця відмінність в асимптотичній поведінці лівої та правої частин точного співвідношення (

4.27) свідчить про те, що при  $\nu_{\perp} = \nu_{\parallel} = 0$  дрейфовий рух феромагнітних наночастинок відсутній. Можна очікувати, що у відповідності з теоремою Массери в цьому випадку кут намагніченості  $\varphi$  і координата частинки  $r_x$  періодично змінюються з часом.

### 4.2.3 Наближені розв'язки

Тепер знайдемо наближені розв'язки системи рівнянь (4.8) і (4.9) при умові, що  $|r_x - r_{x0}| \ll 1$ . У цьому випадку, замінивши в (4.8)  $r_x(\tau')$  на  $r_{x0}$  та використавши інтеграл (4.22), отримуємо явний вираз для кута намагніченості  $\varphi$  як функцію безрозмірного часу  $\tau$

$$\varphi = \arccos \left( \frac{\cos \varphi_0 + \tanh [\nu_g r_{x0} f(\tau)]}{1 + \cos \varphi_0 \tanh [\nu_g r_{x0} f(\tau)]} \right). \quad (4.28)$$

Далі, підставивши (4.28) в (4.21) і приймаючи до уваги, що при  $|r_x - r_{x0}| \ll 1$  має місце наближена рівність  $r_x^2 - r_{x0}^2 = 2r_{x0}(r_x - r_{x0})$  (якщо  $r_{x0} \neq 0$ ), після простих обчислень знаходимо залежну від часу координату наночастинок

$$r_x = r_{x0} + \frac{4}{3} \nu_g \ln [G(\tau)]^{\frac{1}{\nu_g r_{x0}}}, \quad (4.29)$$

де

$$G(\tau) = \cosh [\nu_g r_{x0} f(\tau)] + \cos \varphi_0 \sinh [\nu_g r_{x0} f(\tau)]. \quad (4.30)$$

Зазначимо, що згідно з (4.17) кут намагніченості (4.28) є періодичною функцією часу з безрозмірним періодом  $2\pi$ . У загальному випадку координата частинки (4.29) також є періодичною функцією часу з тим же самим періодом. Але, як випливає з (4.17), (4.29) і (4.30), в особливому випадку, коли умови  $\phi = \pi/2$  та  $\varphi_0 = \pi/2$  задовольняються одночасно, період функції  $r_x$  дорівнює  $\pi$ .

Таким чином, функції (4.28) і (4.29) є розв'язком системи рівнянь (4.8) і (4.9) при  $|r_x - r_{x0}| \ll 1$ . Оскільки максимальна величина функції  $[G(\tau)]^{\frac{1}{\nu_g r_{x0}}}$  має значення порядку декількох одиниць, з (4.29) випливає, що умова  $|r_x - r_{x0}| \ll 1$  виконується лише при  $\nu_g \ll 1$ . Важливо підкреслити, що величина  $|r_{x0}|$  може бути довільною: обертальні та поступальні рухи всіх частинок при  $\nu_g \ll 1$  описуються тими самими формулами (4.28) і (4.29). Зокрема, для наночастинок поблизу початку координат, коли вико-

нується умова  $\nu_g |r_{x0}| \ll 1$ , їх можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 - \nu_g r_{x0} \sin \varphi_0 f(\tau) - \frac{1}{4} \nu_g^2 r_{x0}^2 \sin(2\varphi_0) f^2(\tau), \\ r_x &= r_{x0} + \frac{4}{3} \nu_g \cos \varphi_0 f(\tau) + \frac{2}{3} \nu_g^2 r_{x0} \sin^2 \varphi_0 f^2(\tau).\end{aligned}\quad (4.31)$$

Ці результати, що отримані в квадратичному наближенні за малими параметрами  $\nu_g$  і  $\nu_g |r_{x0}|$ , при  $\varphi_0 = 0, \pi$  підтверджуються точними розв'язками (4.16). Зауважимо також, що згідно з (4.31), амплітуда коливань кута намагніченості зростає набагато швидше зі збільшенням  $|r_{x0}|$ , ніж амплітуда коливань координати.

Для наночастинок, які розташовані далеко від початку координат, тобто коли  $\nu_g |r_{x0}| \gg 1$ , формула (4.28) зводиться до  $2\pi$ -періодичної ступеневої функції

$$\varphi = \begin{cases} 0, & r_{x0} f(\tau) > 0, \\ \varphi_0, & f(\tau) = 0, \\ \pi, & r_{x0} f(\tau) < 0. \end{cases}\quad (4.32)$$

Взагалі кажучи, часову залежність координати наночастинки у даному випадку можна визначити з формул (4.29) і (4.30). Однак для цієї мети зручніше використовувати інтегральну форму рівняння (4.9)

$$r_x = r_{x0} + \frac{4}{3} \nu_g \int_0^\tau \cos \varphi(\tau') \sin(\tau' + \phi) d\tau'.\quad (4.33)$$

Дійсно, підставляючи (4.32) у (4.33) та використовуючи умови  $f(\tau) > 0$  [ $f(\tau) < 0$ ] при  $\tau \in (0, 2\pi - 2\phi)$  та  $f(\tau) < 0$  [ $f(\tau) > 0$ ] при  $\tau \in (2\pi - 2\phi, 2\pi)$ , які виконуються при  $\phi \in (0, \pi/2)$  [ $\phi \in (\pi/2, \pi)$ ], безпосередньо з (4.33) отримуємо

$$r_x = r_{x0} \pm \frac{4}{3} \nu_g |f(\tau)|,\quad (4.34)$$

де верхній та нижній знаки відносяться до  $r_{x0} > 0$  і  $r_{x0} < 0$ , відповідно. Таким чином, у даному випадку наночастинки коливаються правіше (лівіше) початкової координати  $r_{x0}$ , якщо  $r_{x0} > 0$  ( $r_{x0} < 0$ ). Варто також наголосити, що період цих коливань стрибкоподібно зменшується від  $2\pi$  до  $\pi$ , якщо  $\phi = \pi/2$  (тобто умова  $\varphi_0 = \pi/2$  не є необхідною при  $\nu_g |r_{x0}| \rightarrow \infty$ ). Зазначимо також, що динаміка наночастинок при  $\nu_g \sim 1$  та

$|r_{x0}| \gg 1$  описується тими самими формулами ( 4.32) і (4.34).

#### 4.2.4 Чисельна перевірка аналітичних результатів

Щоб отримати більш повне уявлення про сумісну обертальну та поступальну динаміку наночастинок та перевірити отримані вище аналітичні результати, рівняння (4.8) і (4.9) при  $\nu_{\perp} = \nu_{\parallel} = 0$  були розв'язані чисельно. Чисельні результати представлені для  $\text{SmCo}_5$  наночастинок, що рухаються у воді за кімнатної температури (295 К) та характеризується параметрами  $M = 1.36 \times 10^3 \text{ emu cm}^{-3}$  і  $\eta = 9.62 \times 10^{-3} \text{ P}$ . Вибір  $\text{SmCo}_5$  наночастинок зумовлений двома факторами. По-перше, енергія магнітної анізотропії у цьому матеріалі настільки велика, що використання умови "вмороженості" намагніченості в тіло наночастинок є цілком виправданим. По-друге, оскільки критичний діаметр  $2a_{cr}$  для  $\text{SmCo}_5$  наночастинок становить близько  $10^3 \text{ nm}$  [70], умова однодоменності  $a < a_{cr}$  виконується навіть для досить великих наночастинок (ми обираємо  $a = 10^2 \text{ nm}$ ). Градієнт  $g$  градієнтного магнітного поля обрано рівним  $10^2 \text{ Oe cm}^{-1}$ , а його кутова частота  $\Omega$  обирається такою, щоб безрозмірна частота  $\nu_g$  лежала в інтервалі від  $10^{-3}$  ( $\Omega \approx 2.36 \times 10^4 \text{ rad s}^{-1}$ ) до  $10^{-1}$  ( $\Omega \approx 2.36 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}$ ). Далі, у відповідності до попередніх припущень, фазу градієнтного магнітного поля  $\phi$  та початковий кут намагніченості  $\varphi_0$  обираємо з інтервалу  $[0, \pi]$ . В той же час, початкове положення наночастинок  $r_{x0}$  обмежене розміром системи. Тому, припускаючи, що суспензія розташована між паралельними площинами  $x = \pm l$  ( $l = 1 \text{ cm}$ ), отримуємо  $|r_{x0}| \leq l/a = 10^5$ .

Той факт, що умова  $\nu_g |r_{x0}| \gg 1$  може виконуватись, викликає деякі технічні труднощі при чисельному розв'язку системи рівнянь ( 4.8) і (4.9) чисельно. Причина полягає в тому, що система наночастинок у цьому випадку характеризується двома дуже різними (безрозмірними) часовими масштабами  $\tau_1$  і  $\tau_2$ . Перший характеризує поступальну динаміку наночастинок під дією осцилюючого градієнтного магнітного поля; згідно з (4.34) його можна визначити як  $\tau_1 = 1$ . А другий характеризує інтервал часу, протягом якого кут намагніченості  $\varphi$  змінюється від 0 до  $\pi$  (або навпаки). Використовуючи (4.28) і (4.17), цей масштаб можна оцінити як  $\tau_2 = (\nu_g |r_{x0}|)^{-1}$ , тобто  $\tau_2 \ll \tau_1$ . Тому, оскільки крок за часом  $\Delta\tau$  має задовольняти умову  $\Delta\tau \ll \min\{\tau_1, \tau_2\}$ , його величина може бути настільки

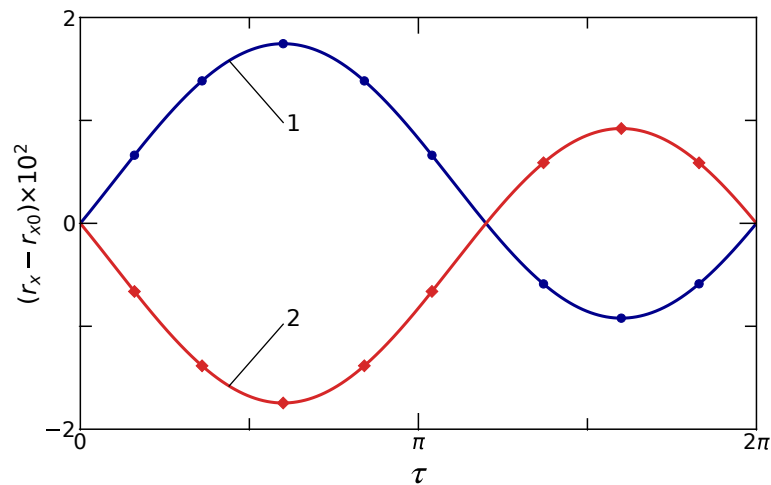


Рисунок 4.1 – Координата наночастинки  $r_x$  як функція безрозмірного часу  $\tau$  для  $\varphi_0 = 0$  (лінія 1) і  $\varphi_0 = \pi$  (лінія 2). Значення інших параметрів:  $\nu_g = 10^{-2}$ ,  $\phi = 0.4\pi$ , а початкове положення частинки  $r_{x0}$  є довільним. Суцільні лінії представляють точні результати (4.16), тоді як результати чисельного розв’язку рівнянь (4.8) і (4.9) представлені символами.

малою, що чисельне розв’язання рівнянь (4.8) і (4.9) при  $\nu_g|r_{x0}| \gg 1$  буде займати дуже багато часу. Ця проблема є загальною для всіх жорстких звичайних диференціальних рівнянь, і для її подолання був розроблений ряд методів (див., наприклад, [?]).

Використовуючи метод Рунге-Кутти четвертого порядку, були знайдені чисельні розв’язки системи рівнянь (4.8) і (4.9) та підтверджені всі теоретичні результати. На рисунку 4.1 показано, що аналітичні розв’язки (4.16) цих рівнянь повністю узгоджуються з чисельними. Рисунок (4.2) ілюструє правильність наближеного розв’язку, (4.28) і (4.29), рівнянь (4.8) і (4.9) при  $\nu_g \ll 1$ . Цей рисунок підтверджує також наше передбачення, що період функції  $r_x$  при  $\varphi_0 = \phi = \pi/2$  вдвічі менший, ніж період функції  $\varphi$ . Нарешті випадок, коли  $\nu_g|r_{x0}| \gg 1$ , ілюструє рисунок (?). Як видно, наближені та чисельні розв’язки рівнянь (4.8) і (4.9) практично співпадають. Звернемо увагу на те, що відповідно до (4.32) і (4.34) подальше збільшення  $|r_{x0}|$  не впливає на часову залежність  $r_x - r_{x0}$  і  $\varphi$ . В той же час, внаслідок жорсткості системи рівнянь (4.8) і (4.9) їх чисельний розв’язок стає проблематичним.

Таким чином, аналітичні та чисельні результати однозначно свідчать про те, що при  $\nu_{\perp} = \nu_{\parallel} = 0$  градієнтне магнітне поле, яке змінюється з часом за гармонічним законом, індукує лише періодичні рухи (поступальні



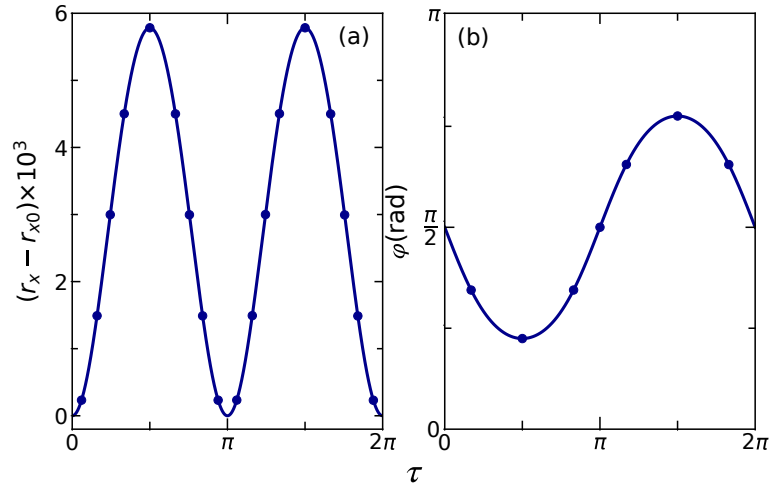


Рисунок 4.2 – Залежність координати наночастинки  $r_x$  (а) і кута намагніченості  $\varphi$  (б) від безрозмірного часу  $\tau$  при  $\nu_g = 10^{-2}$ ,  $r_{x0} = 10^2$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$  і  $\phi = \pi/2$ . Суцільні лінії зображають наближені розв'язки (4.29) і (4.28) рівнянь (4.8) і (4.9) для  $r_x$  і  $\varphi$ , відповідно. Як і на рисунку (4.1), результати чисельного розв'язку цих рівнянь позначені символами.

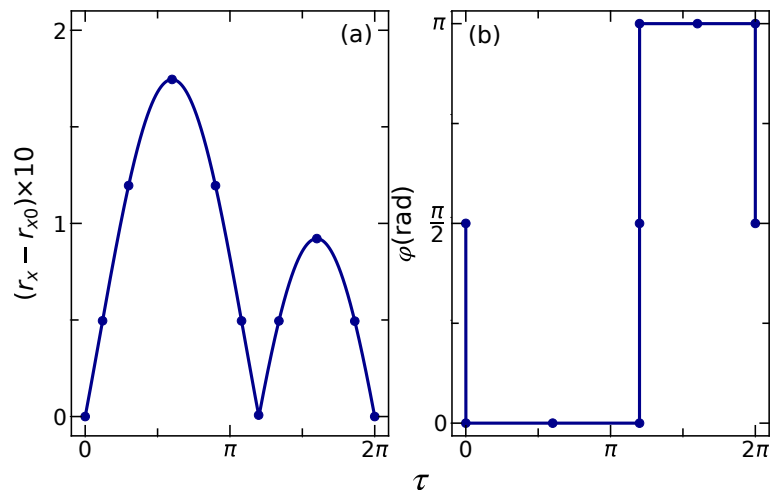


Рисунок 4.3 – Залежність координати частинки  $r_x$  (а) і кута намагніченості  $\varphi$  (б) від безрозмірного часу  $\tau$  при  $\nu_g = 10^{-1}$ ,  $r_{x0} = 10^4$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$  і  $\phi = 0, 4\pi$ . Наближені розв'язки (4.34) і (4.32) рівнянь (4.8) і (4.9) показані суцільними лініями. Символи мають те саме значення, що й раніше.

та обертальні) наночастинок.

## 5 ДРЕЙФ ФЕРРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК ПРИ НАЯВНОСТІ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЇ КОМПОНЕНТИ ОДНОРІДНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 5.1 Динаміка наночастинок при $\nu_{\perp} > 0$ і $\nu_{\parallel} = 0$

#### 5.1.1 Явище дрейфу: попередні результати та визначення

Ми починаємо аналіз динаміки наночастинок, що відбувається при наявності лише перпендикулярної компоненти однорідного магнітного поля (коли  $\nu_{\perp} > 0$  і  $\nu_{\parallel} = 0$ ), з узагальнення співвідношення (4.21). Діючи так само, як в розділі 4.2.2, і беручи до уваги, що

$$\frac{d}{d\tau} \left( \ln \sin \varphi + \frac{3}{8} r_x^2 \right) = \nu_{\perp} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}, \quad (5.1)$$

отримуємо інтегральну формулу

$$\ln \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} + \frac{3}{8} (r_x^2 - r_{x0}^2) = \nu_{\perp} \int_0^{\tau} \frac{\cos^2 \varphi(\tau')}{\sin \varphi(\tau')} d\tau', \quad (5.2)$$

яка узагальнює (4.21) на випадок, коли  $\nu_{\perp} > 0$ . Оскільки  $\varphi \in [0, \pi]$ , його права частина,  $P(\tau)$ , монотонно зростає з часом. Загалом, існує два режими зростання. Перший характеризується умовою  $P(\infty) < \infty$ , яка, згідно (4.8) та (4.9) може бути реалізована, якщо  $\varphi \rightarrow \pi/2$  і  $r_x \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Як випливає з (5.2), такий режим може існувати тільки для наночастинок, в яких початковий кут намагніченості  $\varphi_0$  та їх початкова координата  $r_{x0}$  задовольняють умові

$$\ln \sin \varphi_0 + \frac{3}{8} r_{x0}^2 + P(\infty) = 0. \quad (5.3)$$

Другий режим реалізується, якщо  $P(\tau)$  з часом прагне до нескінченності. У цьому випадку майже всі наночастинки з  $r_{x0} > 0$  рухаються вправо ( $r_x \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ) і майже всі наночастинки з  $r_{x0} < 0$  рухаються вліво ( $r_x \rightarrow -\infty$  як  $\tau \rightarrow \infty$ ), виконуючи при цьому коливальні

рухи. Іншими словами, градієнтне магнітне поле, що змінюється з часом за гармонічним законом, індукує спрямований транспорт (дрейф) зважених у в'язкій рідині феромагнітних наночастинок, якщо існує перпендикулярна компонента зовнішнього однорідного магнітного поля. На перший погляд це виглядає парадоксально, оскільки однорідне поле не генерує магнітної сили. Однак, згідно з (4.4), воно створює додатковий обертальний момент, який впливає на кут намагніченості  $\varphi$  і, отже, опосередковано змінює рушійну силу (4.5). Саме цей обертальний момент відповідає за появу дрейфового руху наночастинок (див. нижче).

В рамках нашої моделі будь-який параметр, що характеризує дрейфовий рух наночастинок, можна знайти, якщо розв'язок рівнянь (4.8) і (4.9) відомий. Одним з найважливіших параметрів є швидкість дрейфу, тобто середня швидкість наночастинок  $\bar{v}$ , яка визначається як зміщення частинки  $\Delta r_x$  (після перехідного часу  $\tau_{tr}$ ) протягом періоду  $2\pi$  градієнтного магнітного поля:  $\bar{v} = \Delta r_x / 2\pi$ . Оскільки  $\Delta r_x = r_x(2\pi + \tau_{tr}) - r_x(\tau_{tr})$ , з (4.9) знаходимо наступний вираз для безрозмірної швидкості дрейфу:

$$\bar{v} = \frac{2\nu_g}{3\pi} \int_{\tau_{tr}}^{2\pi + \tau_{tr}} \cos \varphi(\tau) \sin(\tau + \phi) d\tau. \quad (5.4)$$

Зазначимо також, що розмірна швидкість дрейфу  $\bar{V}$  виражається через безрозмірну, як  $\bar{V} = \Omega a \bar{v}$ .

### 5.1.2 Динаміка наночастинок в околі початку координат

Оскільки, згідно з (4.10),  $\nu_{\perp} / \nu_g = H_{\perp} / ga$ , величина цього відношення зазвичай досить велика. Тому з урахуванням параметрів моделі, представлених у попередньому розділі, обмежемо наш аналіз тільки випадком, коли  $\nu_{\perp} \gg 1$  і  $\nu_g \ll 1$ .

Почнемо вивчення явища дрейфу для наночастинок, розташованих поблизу початку координат. Більш точно, ми розглядаємо наночастинок, чий початковий положення задовольняють умові  $1 \lesssim |r_{x0}| \ll \nu_{\perp} / \nu_g$ . Для цих наночастинок існує два абсолютно різних динамічних режими. Перший реалізується при  $0 \leq \tau \leq \tau_{tr}$  і характеризується швидкими змінами

змінних  $\varphi$  і  $r_x$ , а другий, що існує при  $\tau \geq \tau_{tr}$ , характеризується значно повільнішою динамікою.

Наведені вище обмеження дозволяють приблизно визначити кут намагніченості  $\varphi$  у цих двох режимах. Справді, оскільки  $\nu_{\perp} \gg 1$  і, як наслідок,  $\tau_{tr} \ll 1$  (це буде доведено пізніше), функції  $\cos \varphi$  і  $\sin \varphi$  на часовому інтервалі  $[0, \tau_{tr}]$  можуть бути лінійно апроксимовані наступним чином:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \cos \varphi_0 + (\cos \varphi^{(0)} - \cos \varphi_0)\tau/\tau_{tr}, \\ \sin \varphi &= \sin \varphi_0 + (\sin \varphi^{(0)} - \sin \varphi_0)\tau/\tau_{tr}\end{aligned}\quad (5.5)$$

$[\varphi^{(0)} = \varphi(\tau_{tr})]$ . Використовуючи цей результат і інтегруючи рівняння (4.8) за часом  $\tau$  від 0 до  $\tau_{tr}$ , отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned}2(\varphi^{(0)} - \varphi_0) &= \nu_{\perp}(\cos \varphi^{(0)} + \cos \varphi_0)\tau_{tr} \\ &\quad - \nu_g r_{x0} \sin \phi (\sin \varphi^{(0)} + \sin \varphi_0)\tau_{tr},\end{aligned}\quad (5.6)$$

яке після обчислення  $\varphi^{(0)}$  буде використане для визначення часу перехідного процесу  $\tau_{tr}$ .

У другому динамічному режимі (коли  $\tau \geq \tau_{tr}$ ) представимо кут намагніченості у вигляді

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi_1(\tau),\quad (5.7)$$

де  $|\varphi_1(\tau)| \ll 1$  і  $\varphi_1(\tau_{tr}) = 0$ . Якщо  $\tau$  обмежено декількома періодами градієнтного магнітного поля, тоді координату частинки  $r_x$  в (4.8) можна замінити її початковою координатою  $r_{x0}$ . За таких припущень (4.8) зводиться до лінійного рівняння

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1(\tau) &= \nu_{\perp} \cos \varphi^{(0)} - \nu_{\perp} \sin \varphi^{(0)} \varphi_1(\tau) \\ &\quad - \nu_g r_{x0} \sin \varphi^{(0)} \sin(\tau + \phi),\end{aligned}\quad (5.8)$$

розв'язок якого можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= \cot \varphi^{(0)} + \frac{\nu_g r_{x0} \sin \varphi^{(0)}}{1 + \nu_{\perp}^2 \sin^2 \varphi^{(0)}} \\ &\times (\cos(\tau + \phi) - \nu_{\perp} \sin \varphi^{(0)} \sin(\tau + \phi)). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Залишивши в (5.9) члени порядку  $\nu_g/\nu_{\perp}$ , отримуємо

$$\varphi_1(\tau) = \cot \varphi^{(0)} - \frac{\nu_g}{\nu_{\perp}} r_{x0} \sin(\tau + \phi). \quad (5.10)$$

Звідси, використовуючи умову  $\varphi_1(\tau_{tr}) = 0$  та формулу (5.7), знаходимо часову залежність кута  $\varphi$  у другому динамічному режимі

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\nu_g}{\nu_{\perp}} r_{x0} \sin(\tau + \phi). \quad (5.11)$$

Тепер визначимо час перехідного процесу  $\tau_{tr}$ . Якщо припустити, що початковий кут намагніченості  $\varphi_0$  не надто близький до  $\pi/2$  і замінюючи, згідно з (5.11),  $\varphi^{(0)}$  на  $\pi/2$  (нагадаємо, що  $\varphi^{(0)} = \varphi(\tau_{tr})$ ), з (5.6) отримуємо явну формулу для часу перехідного процесу

$$\tau_{tr} = \frac{\pi - 2\varphi_0}{\nu_{\perp} \cos \varphi_0}, \quad (5.12)$$

яка показує, що  $\tau_{tr} \ll 1$ . Якщо  $\varphi_0 = \pi/2$ , тоді співвідношення (5.6) разом з формулою

$$\varphi^{(0)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\nu_g}{\nu_{\perp}} r_{x0} \sin \phi \quad (5.13)$$

(тут припускається, що  $\phi \gg \tau_{tr}$ ) дає  $\tau_{tr} = 2/\nu_{\perp}$ . Таким чином, оскільки з (5.12) випливає, що  $\tau_{tr} \rightarrow 2/\nu_{\perp}$  при  $\varphi_0 \rightarrow \pi/2$ , формула (5.12) завжди може бути використана для оцінки часу перехідного процесу.

Нарешті, використовуючи (4.9) і отримані вище результати, можна описати і поступальний рух наночастинок. Визначимо спочатку переміщення наночастинки  $r_x^{(0)} - r_{x0}$  [ $r_x^{(0)} = r_x(\tau_{tr})$ ] протягом перехідного часу  $\tau_{tr}$ . Для цього підставимо  $\cos \varphi$  з (5.5) у рівняння (4.9) і проінтегруємо його за часом  $\tau$  від 0 до  $\tau_{tr}$ . В результаті, використовуючи (5.12) і (5.13), для

переміщення наночастинки отримуємо формулу

$$r_x^{(0)} - r_{x0} = \frac{2\nu_g \pi - 2\varphi_0}{3\nu_{\perp} \cos \varphi_0} \sin \phi \left( \frac{\nu_g}{\nu_{\perp}} r_{x0} \sin \phi + \cos \varphi_0 \right). \quad (5.14)$$

Вона показує, що переміщення наночастинок дуже сильно залежить від початкових умов. Зокрема, якщо  $|\cos \varphi_0| \gg (\nu_g/\nu_{\perp})|r_{x0}| \sin \phi$ , тоді

$$r_x^{(0)} - r_{x0} = \frac{2\nu_g}{3\nu_{\perp}} (\pi - 2\varphi_0) \sin \phi, \quad (5.15)$$

а при  $\varphi_0 = \pi/2$  формула (5.14) дає

$$r_x^{(0)} - r_{x0} = \frac{4\nu_g^2}{3\nu_{\perp}^2} r_{x0} \sin^2 \phi. \quad (5.16)$$

Для опису поступального руху наночастинок у другому динамічному режимі будемо використовувати рівняння (4.9), в якому кут  $\varphi$  визначається за формулою (5.11). Інтегруючи це рівняння за часом в інтервалі  $[\tau_{tr}, \tau]$ , де, як і раніше,  $\tau (\geq \tau_{tr})$  обмежено декількома періодами градієнтного магнітного поля, неважко отримати наступну формулу для координати наночастинки:

$$r_x = r_x^{(0)} + \frac{\nu_g^2}{3\nu_{\perp}^2} r_{x0} \left[ 2(\tau - \tau_{tr}) - \sin 2(\tau + \phi) + \sin 2(\tau_{tr} + \phi) \right]. \quad (5.17)$$

У відповідності з цим результатом наночастинок рухаються коливальним чином праворуч (якщо  $r_{x0} > 0$ ) або ліворуч (якщо  $r_{x0} < 0$ ). Це підтверджує наше передбачення про те, що градієнтне магнітне поле, яке змінюється з часом за гармонічним законом, генерує спрямований транспорт наночастинок, тільки якщо  $\nu_{\perp} > 0$ . Використовуючи визначення швидкості дрейфу  $\bar{v} = [r_x(2\pi + \tau_{tr}) - r_x(\tau_{tr})]/2\pi$  та формулу (5.17), для середньої швидкості дрейфу наночастинок в околі початку координат,  $\bar{v}_1 = \bar{v}|_{|r_{x0}| \ll \nu_{\perp}/\nu_g}$ , знаходимо наступну формулу:

$$\bar{v}_1 = \frac{2\nu_g^2}{3\nu_{\perp}^2} r_{x0}. \quad (5.18)$$

Той факт, що  $\bar{v}_1$  лінійно залежить від  $r_{x0}$  означає, що координата наночастинки  $r_x(2\pi n)$  експоненційно зростає з числом  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) періодів осцилюючого градієнтного магнітного поля, якщо виконується умова  $|r_x(2\pi n)| \ll \nu_\perp/\nu_g$ . Дійсно, в цьому випадку

$$r_x(2\pi n) = r_x(2\pi n - 2\pi) \left( 1 + \frac{4\pi\nu_g^2}{3\nu_\perp} \right) \quad (5.19)$$

і, як наслідок,

$$r_x(2\pi n) = r_{x0} \exp \left[ n \ln \left( 1 + \frac{4\pi\nu_g^2}{3\nu_\perp} \right) \right]. \quad (5.20)$$

Щоб уникнути плутанини, акцентуємо увагу на двох моментах, пов'язаних з цим результатом. По-перше, оскільки  $|r_x(2\pi n)| \ll \nu_\perp/\nu_g$  і  $4\pi\nu_g^2/3\nu_\perp \ll 1$ , координата частинки  $r_x(2\pi n)$  зростає експоненційно з дискретним часом  $2\pi n$  тільки в тому випадку, якщо

$$n \ll n_{\max} = \frac{3\nu_\perp}{4\pi\nu_g^2} \ln \frac{\nu_\perp}{\nu_g|r_{x0}|}. \quad (5.21)$$

Іншими словами, формула (5.20) справедлива при  $\tau_{tr} < \tau \ll 2\pi n_{\max}$  для наночастинок, чії початкові координати задовольняють умові  $|r_{x0}| \ll \nu_\perp/\nu_g$ . І по-друге, згідно з (5.17) координата частинки  $r_x(\tau)$  (на відміну від  $r_x(2\pi n)$ ) зростає (або спадає) з часом  $\tau$  коливальним чином.

### 5.1.3 Швидкість дрейфу на великих відстанях від початку координат

Визначемо тепер швидкість дрейфу наночастинок, які знаходяться на великих відстанях від початку координат, тобто коли виконується умова  $|r_x| \gg \nu_\perp/\nu_g$ . У цьому випадку час перехідного процесу  $\tau_{tr} \sim (\nu_g|r_x|)^{-1}$  малий ( $\tau_{tr} \ll \nu_\perp^{-1}$ ) і, відповідно до (4.8), кут намагніченості  $\varphi$  і координата частинки  $r_x$  пов'язані між собою співвідношенням

$$\cot \varphi - \frac{\nu_g r_x}{\nu_\perp} \sin(\tau + \phi) = 0. \quad (5.22)$$

Зідси при  $\nu_g|r_x|/\nu_\perp \rightarrow \infty$  отримуємо

$$\cos \varphi = \operatorname{sgn}(r_x) \begin{cases} 1, & 0 < \tau < \pi - \phi, \\ -1, & \pi - \phi < \tau < 2\pi - \phi, \\ 1, & 2\pi - \phi < \tau < 2\pi, \end{cases} \quad (5.23)$$

де  $\operatorname{sgn}(x)$  – знакова функція. Підставивши цей результат у загальну формулу (5.4) і виконавши просте інтегрування, знаходимо середню швидкість дрейфу наночастинок  $\bar{v}_2 = \bar{v}|_{|r_x| \gg \nu_\perp/\nu_g}$  на великих відстанях від початку координат (щоб підкреслити цей факт, дану швидкість дрейфу будемо позначати також як  $\bar{v}_\infty$ )

$$\bar{v}_2 = \operatorname{sgn}(r_x) \frac{8\nu_g}{3\pi}. \quad (5.24)$$

Зазначимо також, що якщо початкова координата частинки  $r_{x0}$  не надто близька до початку координат, тоді  $\operatorname{sgn}(r_x)$  можна замінити на  $\operatorname{sgn}(r_{x0})$  (див. розділ 5.1.1).

Оскільки швидкість дрейфу таких наночастинок однакова (тобто не залежить від  $|r_{x0}|$ ), їх координати лінійно зростають (якщо  $r_{x0} > 0$ ) або спадають (якщо  $r_{x0} < 0$ ) із збільшенням дискретного часу  $2\pi n$ . Порівнюючи (5.24) та (5.18), бачимо, що  $|\bar{v}_2| \gg |\bar{v}_1|$ . Дивно, але згідно із (5.24) розмірна середня швидкість дрейфу  $|\bar{V}_2| = 4Mga^2/9\pi\eta$ , яка досягається в осцилюючому градієнтному магнітному полі, близька до швидкості рівномірного руху наночастинок  $|V| = 2Mga^2/9\eta$  у разі незалежного від часу градієнтного магнітного поля [50].

#### 5.1.4 Явище дрейфу: чисельні результати

Щоб перевірити теоретичні результати отримані в розділах 5.1.2 і 5.1.3, система рівнянь (4.8) і (4.9) була чисельно розв’язана при  $\nu_\perp \gg 1$ . На рисунку (5.1) показані теоретичні і чисельні залежності від часу координати  $r_x$  і кута намагніченості  $\varphi$  для наночастинок в околі початку координат. Як можна бачити, чисельні результати (символи) дуже добре узгодені з теоретичними результатами. Зокрема, функції  $r_x$  і  $\varphi$  у друго-



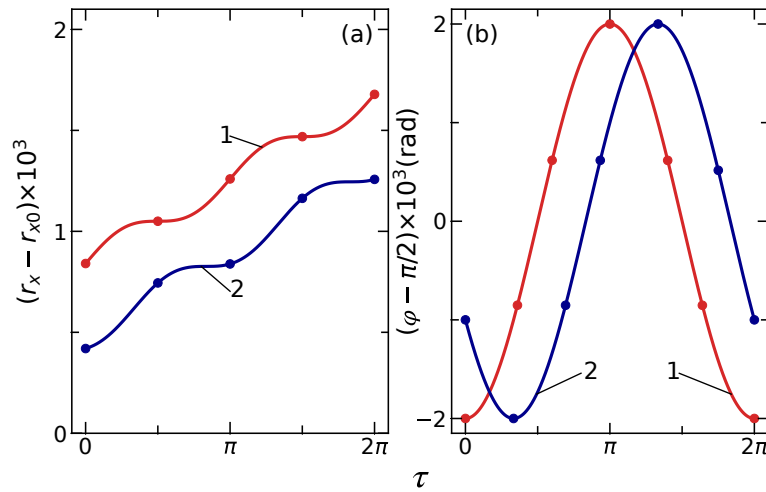


Рисунок 5.1 – Залежності координати частинки  $r_x$  (а) і кута намагніченості  $\varphi$  (б) від безрозмірного часу  $\tau$  для наночастинок в околі початку координат. Обрані параметри моделі:  $\nu_g = 10^{-1}$ ,  $\nu_{\perp} = 10^2$ ,  $r_{x0} = 2$  і  $\varphi_0 = 0.3\pi$ . Суцільні лінії (1) і (2) представляють теоретичні результати (5.17) і (5.11) для  $\phi = \pi/2$  і  $\phi = \pi/6$ , відповідно. Символами показані результати, отримані шляхом чисельного розв’язання рівнянь (4.8) і (4.9).

му динамічному режимі описуються формулами (5.17) та (5.11), а умови  $r_x(2\pi + \tau) = 2\pi\bar{v}_1 + r_x(\tau)$  і  $\varphi(2\pi + \tau) = \varphi(\tau)$  виконуються, якщо час  $\tau$  не надто великий. Більш того, числові значення  $r_x^{(0)}$  та  $\varphi^{(0)}$  знаходяться у повній відповідності до даних, отриманих з формули (5.14) ( $r_x^{(0)} - r_{x0} = 8.41 \times 10^{-4}$  для  $\phi = \pi/2$  і  $r_x^{(0)} - r_{x0} = 4.20 \times 10^{-4}$  для  $\phi = \pi/6$ ) та формули (5.13) ( $\varphi^{(0)} - \pi/2 = -2 \times 10^{-3}$  для  $\phi = \pi/2$  та  $\varphi^{(0)} - \pi/2 = -10^{-3}$  для  $\phi = \pi/6$ ). Чисельна швидкість дрейфу також добре узгоджується з теоретичним результатом (5.18) (для обраних параметрів моделі маємо  $\bar{v}_1 = 1.33 \times 10^{-4}$ ).

Числові результати, що підтверджують теоретичну формулу (5.24) для середньої швидкості наночастинок на великих відстаннях від початку координат, наведені на рисунку (5.2). На рисунку (5.2b) прямі суцільні лінії представляють граничну середню швидкість  $\bar{v}_2 = \bar{v}_{\infty}$  як функцію параметра  $\nu_g$  при  $r_{x0} > 0$  і  $r_{x0} < 0$ . Символи відповідають швидкості  $\bar{v}_2 = [r_x - r_{x0}]/2\pi$ , розрахованої з числових результатів, показаних на рисунку 5.2a. Підкреслимо, що, оскільки теоретичний результат (5.24) отримано за умови  $|r_{x0}| \gg \nu_{\perp}/\nu_g$ , лінійна залежність  $\bar{v}_2$  від  $\nu_g$  має місце, тільки якщо параметр  $\nu_g$  не надто малий. Відзначимо також, що розмірна середня швидкість цих наночастинок досить велика:  $|\bar{V}_2| = 2 \times 10^3 \text{ nm s}^{-1}$ .

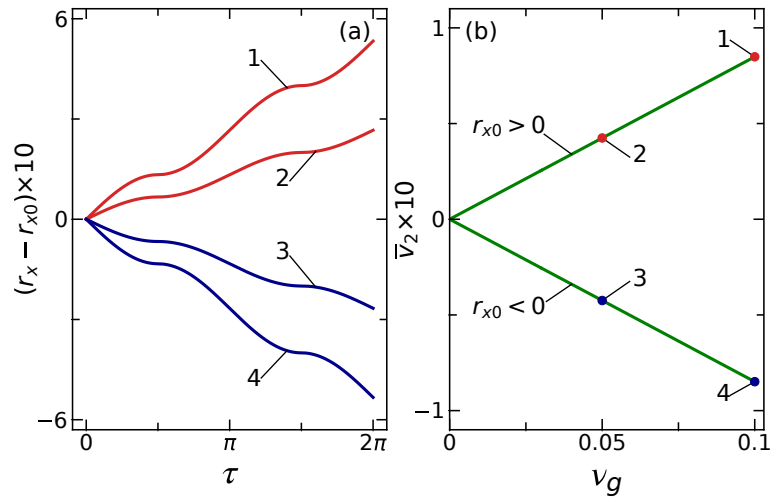


Рисунок 5.2 – Залежність координати наночастинки  $r_x$  від безрозмірного часу  $\tau$  (a) та залежність граничної середньої швидкості  $\bar{v}_2$  від параметра  $\nu_g$  (b) при  $|r_{x0}| \gg \nu_{\perp}/\nu_g$ . Чисельні результати для  $r_x$  наведені для  $\nu_g = 10^{-1}$  і  $r_{x0} = 10^5$  (лінія 1),  $\nu_g = 5 \times 10^{-2}$  і  $r_{x0} = 10^5$  (лінія 2),  $\nu_g = 5 \times 10^{-2}$  і  $r_{x0} = -10^5$  (лінія 3), і  $\nu_g = 10^{-1}$  і  $r_{x0} = -10^5$  (лінія 4). Інші параметри:  $\nu_{\perp} = 10^2$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$  і  $\phi = \pi/2$ . Теоретичні залежності  $\bar{v}_2$  від  $\nu_g$  обчислюються за формулою (5.24) (вони представлені прямими лініями), а чисельні значення  $\bar{v}_2$  зображені символами.

Нарешті, рисунок (5.3) ілюструє поведінку наночастинки (з  $r_{x0} = 10^2$ ) на великому часовому інтервалі. Відповідно до результатів проведеного аналізу наночастинка рухається вправо, а її середня координата

$$\bar{r}_x = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi} r_x(\tau') d\tau' \quad (5.25)$$

наближається на великих часах до лінійного режиму, див. рисунок (5.3)а. Як було встановлено, на малих часах кут намагніченості є майже періодичною функцією  $\tau$ . Проте, оскільки  $|r_x|$  росте з  $\tau$ , можна зробити висновок, що  $\max \varphi$  ( $\min \varphi$ ) зростає до  $\pi$  (зменшується до 0) зі збільшенням  $\tau$ . Цей факт проілюстровано на рисунку (5.3б). Часова залежність середньої швидкості частинок  $\bar{v} = d\bar{r}_x/d\tau$  показана на рисунку (5.3с). Мінімальне та максимальне значення середньої швидкості,  $\bar{v}_1 = 6.67 \times 10^{-3}$  і  $\bar{v}_2 = 8.49 \times 10^{-2}$ , повністю узгоджуються з теоретичними значеннями, отриманими з (5.18) і (5.24), відповідно. Коди Python, які використовувалися для отримання чисельних результатів, депоновані в Mendeley Data [?].

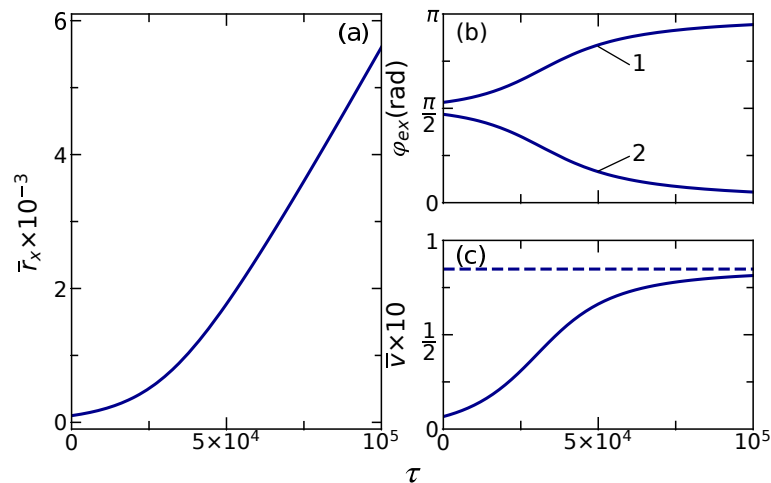


Рисунок 5.3 – Чисельні результати для середньої координати частинки  $\bar{r}_x$  (a), екстремальні значення  $\varphi_{ex}$  кута намагніченості (b) і середньої швидкості частинки  $\bar{v}$  (c) в залежності від безрозмірного часу  $\tau$ . Параметри моделі:  $\nu_g = 10^{-1}$ ,  $\nu_{\perp} = 10^2$ ,  $r_{x0} = 10^2$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$  і  $\phi = \pi/2$ . Лінії 1 і 2 представляють функції  $\max \varphi$  і  $\min \varphi$ , відповідно, а пунктирна горизонтальна лінія відповідає граничній середній швидкості частинки  $\bar{v}_2$ .

Результати цього розділу показують, що явище дрейфу виникає лише за наявності однорідного магнітного поля ( $H_{\perp} > 0$ ). Це поле впливає на кут намагніченості і, внаслідок цього, змінює рушійну силу, яка створюється осцилюючим градієнтним магнітним полем. Спільна дія цих полів призводить до якісних змін в обертальному та поступальному рухах наночастинок. Зокрема, кут намагніченості, який описує обертальний рух, коливається з часом в інтервалі  $[0, \pi]$ , але амплітуда коливань повільно зростає з часом. Поступальний рух наночастинок також змінюється коливальним чином, але протягом кожного періоду градієнтного поля вони злегка зміщуються вправо (якщо  $r_{x0} > 0$ ) або вліво (якщо  $r_{x0} < 0$ ). Саме ці зміщення відповідальні за дрейфовий рух наночастинок, індукований однорідним і градієнтним магнітним полем, що змінюється у часі.

## 6 ДРЕЙФ ФЕРРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК ПРИ НАЯВНОСТІ ПАРАЛЕЛЬНОЇ КОМПОНЕНТИ ОДНОРІДНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 6.1 Динаміка наночастинок при $\nu_{\perp} = 0$ і $\nu_{\parallel} > 0$

Почнемо аналіз динаміки наночастинок при наявності лише паралельної компоненти однорідного магнітного поля, тобто коли  $\nu_{\perp} = 0$  і  $\nu_{\parallel} \neq 0$ . Рівняння (4.8) і (4.9) дозволяють знайти зв'язок між їх розв'язком  $\{\varphi, r_x\}_{\nu_{\parallel}}$  при фіксованому  $\nu_{\parallel}$  і їх розв'язком  $\{\tilde{\varphi}, \tilde{r}_x\}_{\tilde{\nu}_{\parallel}}$  при фіксованому  $\tilde{\nu}_{\parallel} = -\nu_{\parallel}$ . Будемо вважати, що ці розв'язки задовольняють початковим умовам  $\{\varphi_0, r_{x0}\}_{\nu_{\parallel}}$  і  $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{r}_{x0}\}_{\tilde{\nu}_{\parallel}}$ , відповідно. Тоді, обираючи  $\tilde{\varphi} = \pi - \varphi$  з  $\tilde{\varphi}_0 = \pi - \varphi_0$  і  $\tilde{r}_x = -r_x$  з  $\tilde{r}_{x0} = -r_{x0}$ , неважко перевірити, що  $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{r}_{x0}\}_{\tilde{\nu}_{\parallel} = -\nu_{\parallel}}$  – також розв'язок рівнянь (4.8) і (4.9). Тому подальший аналіз можна обмежити випадком, коли  $\nu_{\parallel} > 0$  (випадок  $\nu_{\parallel} = 0$  вже розглянуто у попередньому розділі).

Чисельний аналіз показав, що в цьому випадку дрейфовий рух наночастинок також відсутній. Однак паралельна складова однорідного магнітного поля якісно змінює динаміку наночастинок. Найбільш істотні зміни, що відбуваються при  $\nu_{\parallel} > 0$ , полягають у тому, що розв'язок рівнянь (4.8) і (4.9) наближається з часом до стаціонарного розв'язку  $\{\varphi_{st}, r_{xst}\}$ , де  $\varphi_{st}$  та  $r_{xst}$  визначаються за формулами

$$\varphi_{st} = 0, \quad r_{xst} = \frac{4}{3}\nu_g f(\tau) \quad (6.1)$$

або

$$\varphi_{st} = \pi, \quad r_{xst} = -\frac{4}{3}\nu_g f(\tau) \quad (6.2)$$

(відповідь на питання про те, який саме розв'язок реалізується, залежить від початкових умов). Звернемо увагу на те, що, на відміну від (6.1) і (6.2), розв'язки (4.16) є точними. Але вони були отримані при  $\nu_{\perp} = \nu_{\parallel} = 0$  і відповідають початковим умовам  $\varphi_0 = 0, \pi$ . Якщо ж  $\varphi_0 \neq 0, \pi$ , тоді як  $r_x$ , так і  $\varphi$  є періодичними функціями часу (цей факт проілюстровано на рисунку (6.1)).

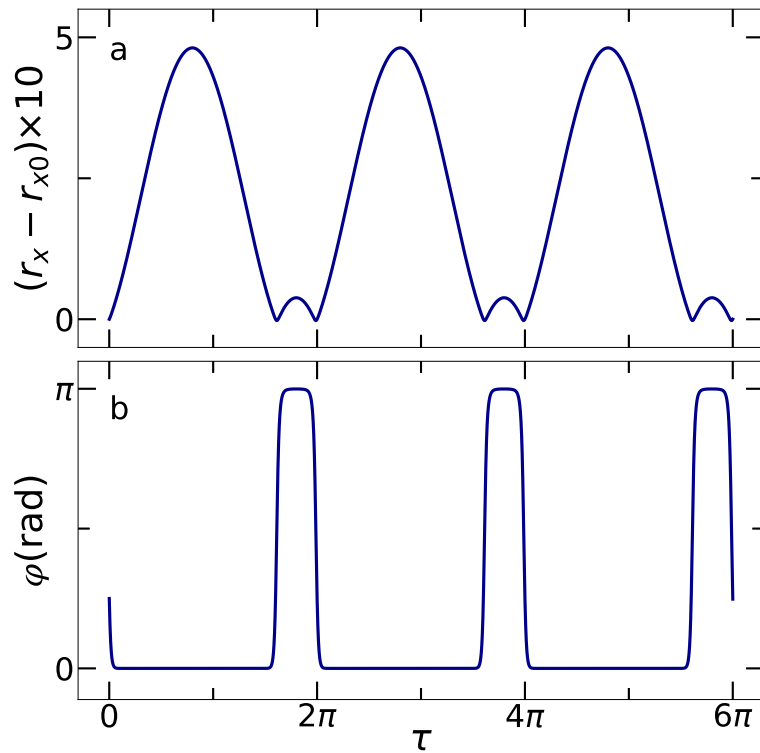


Рисунок 6.1 – Часові залежності координати частинки  $r_x$  (а) і кута намагніченості  $\varphi$  (б) при  $\nu_{\perp} = \nu_{\parallel} = 0$  і  $\nu_g = 0.2$ ,  $r_{x0} = 2 \times 10^2$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $\phi = \pi/5$ .

Що ж стосується стаціонарних розв'язків (6.1) і (6.2) (звернемо увагу на те, що вони не залежать від  $r_{x0}$ ), то вони встановлюються протягом деякого часу  $\tau_{st}$ , яке сильно залежить від  $\nu_{\parallel}$ . Зокрема, якщо значення  $\nu_{\parallel}$  дуже мале, то стаціонарний розв'язок встановлюється протягом багатьох періодів градієнтного магнітного поля. Навпаки,  $\tau_{st} \ll 1$ , якщо значення  $\nu_{\parallel}$  досить велике. Для ілюстрації цього факту на рисунку (6.2а) для  $\nu_{\parallel} = 0.6$  показано залежність від часу координати частинки  $r_x$  отриману чисельно (суцільна лінія) і теоретичний результат для  $r_{xst}$  з (6.1) (пунктирна лінія). Залежність кута намагніченості  $\varphi$  від часу показана на рисунку (6.2б) для  $\nu_{\parallel} = 0.6$  та  $\nu_{\parallel} = 3$ . Із результатів, представлених на рисунку (6.2), можна зробити висновок, що  $\tau_{st} \sim 6\pi$  при  $\nu_{\parallel} = 0.6$  та  $\tau_{st} \ll 1$  при  $\nu_{\parallel} = 3$ .

## 6.2 Динаміка наночастинок при $\nu_{\perp} > 0$ і $\nu_{\parallel} > 0$

У цьому випадку, використовуючи результати проведеного раніше аналізу, можна очікувати, що явище дрейфу наночастинок існує, але його характеристики суттєво залежать від величини  $\nu_{\parallel}$ . Ці очікування підтвер-

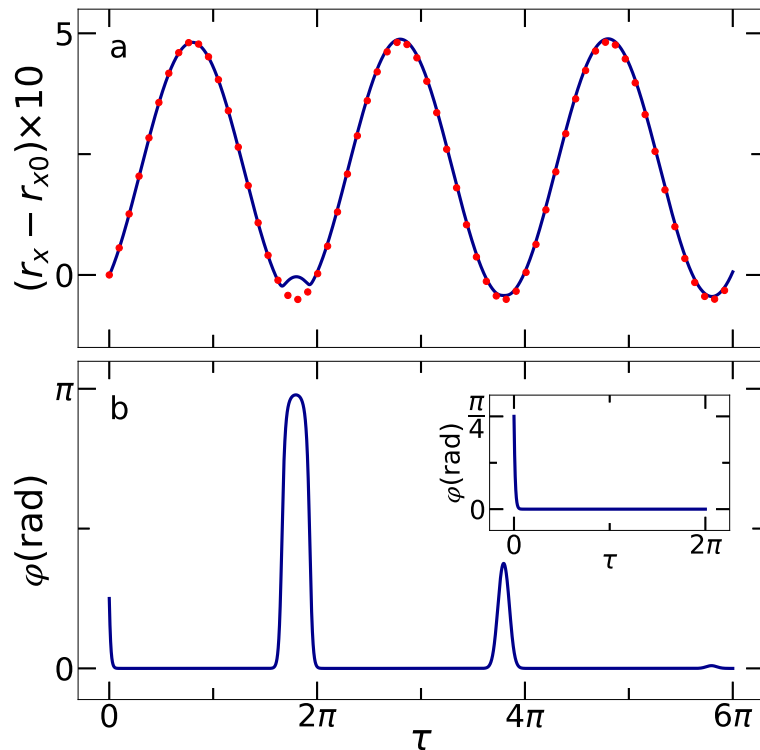


Рисунок 6.2 – Часові залежності координати частинки  $r_x$  (а) і кута намагніченості  $\varphi$  (б) при  $\nu_{\parallel} = 0.6$ . Інші параметри ті ж самі, що і на рисунку (6.1). Пунктирна лінія відповідає теоретичному результату (6.1) для  $r_{xst}$ . Вставка на рисунку (6.2б): залежність  $\varphi$  від  $\tau$  при  $\nu_{\parallel} = 3$ .

джуються результатами чисельного розв'язку системи рівнянь (6.1) і (6.2). В якості приклада на рисунку (6.3) показані часові залежності (на відносно малому часовому інтервалі) координати  $r_x$  і кута  $\varphi$  при  $\nu_{\perp} = 10$  і різних значеннях параметра  $\nu_{\parallel}$ . Вони демонструють загальну тенденцію: збільшення паралельної складової однорідного магнітного поля (тобто збільшення  $\nu_{\parallel}$ ) зменшує ріст  $r_x$ . Щоб кількісно охарактеризувати це зменшення, введемо безрозмірну середню швидкість дрейфу наночастинок  $\bar{v}_n = [r_x(2\pi n) - r_x(2\pi n - 2\pi)]/2\pi$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) на  $n$ -му періоді градієнтного магнітного поля. Оскільки умова  $\bar{v}_n = \text{const}$  виконується, якщо величина  $N$  досить мала, середню швидкість дрейфу на часовому інтервалі  $(0, 2\pi N)$  можна визначити за формулою  $\bar{v} = [r_x(2\pi N) - r_{x0}]/2\pi N$ . Таким чином, збільшення параметра  $\nu_{\parallel}$  зменшує швидкість дрейфу наночастинок. Для даних з рисунку (6.3) (тут  $N = 5$ ) знаходимо  $\bar{v} = 3.1 \times 10^{-2}$  при  $\nu_{\parallel} = 0$ ,  $\bar{v} = 2.4 \times 10^{-2}$  при  $\nu_{\parallel} = 5$  і  $\bar{v} = 1.3 \times 10^{-2}$  при  $\nu_{\parallel} = 10$ .

Швидкість дрейфу кожної наночастинок залежить не тільки від параметрів задачі, а й від часу, протягом якого частинка рухається. Це від-

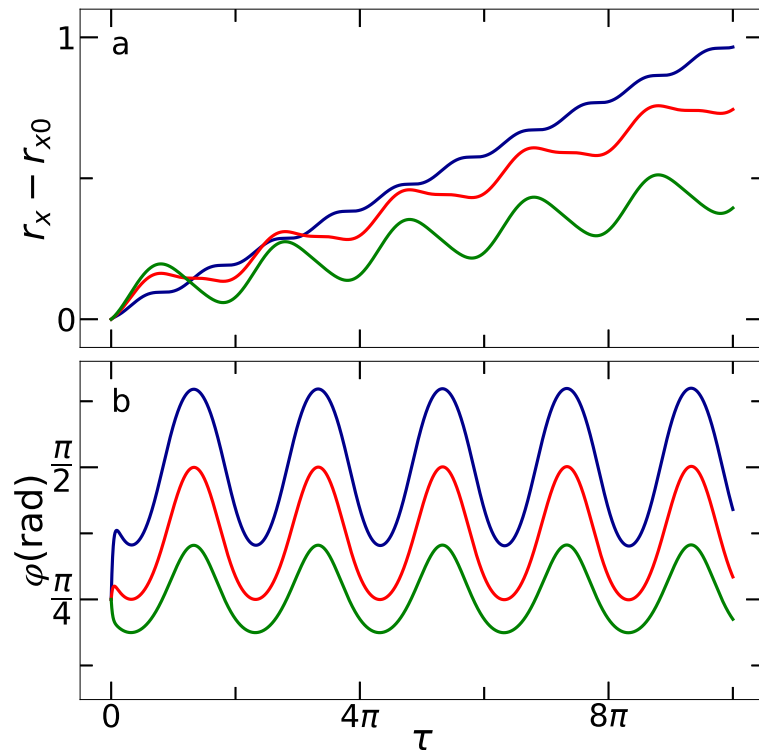


Рисунок 6.3 – Часові залежності координати частинки  $r_x$  (a) і кута намагніченості  $\varphi$  (b) при  $\nu_g = 0.1$ ,  $\nu_{\perp} = 10$ ,  $r_{x0} = 50$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $\phi = \pi/5$  та  $\nu_{\parallel} = 0$  (синя лінія),  $\nu_{\parallel} = 5$  (червона лінія),  $\nu_{\parallel} = 10$  (зелена лінія).

бувається тому, що частинка зміщується вправо або вліво (напрямок залежить від знаку  $r_{x0}$ ) протягом кожного періоду градієнтного магнітного поля. Як наслідок, градієнтне поле, що діє на частинку, збільшується, а обертальні і трансляційні характеристики цієї частинки, включаючи її дрейфову швидкість, змінюються з часом. Цей висновок підтверджується чисельними результатами, представленими на рисунку (6.4). Той факт, що з ростом параметра  $\nu_{\parallel}$  координата  $r_x(2\pi N)$  даної частинки зменшується, проілюстровано на рисунку (6.4)а, де залежності  $r_x(2\pi N)$  від  $N$  показані для  $\nu_{\parallel} = 0$  (синя лінія) і  $\nu_{\parallel} = 25$  (червона лінія). Графіки максимального та мінімального значень кута намагніченості на  $N$ -му періоді градієнтного магнітного поля,  $\varphi_{Nmax}$  та  $\varphi_{Nmin}$ , зображені на рисунку (6.4б). Тут  $\varphi_{1max} = 2.0$  і  $\varphi_{1min} = 1.1$  при  $\nu_{\parallel} = 0$ , та  $\varphi_{1max} = 4.6 \times 10^{-1}$  і  $\varphi_{1min} = 3.2 \times 10^{-1}$  при  $\nu_{\parallel} = 25$ . Якщо  $N \rightarrow \infty$ , тоді  $\varphi_{Nmax} \rightarrow \pi$  і  $\varphi_{Nmin} \rightarrow 0$  для будь-якого фіксованого однорідного магнітного поля. Нарешті, на рисунку (6.4с) показано середню швидкість дрейфу  $\bar{v}_N$  даної частинки на  $N$ -му періоді градієнтного магнітного поля. Для використа-

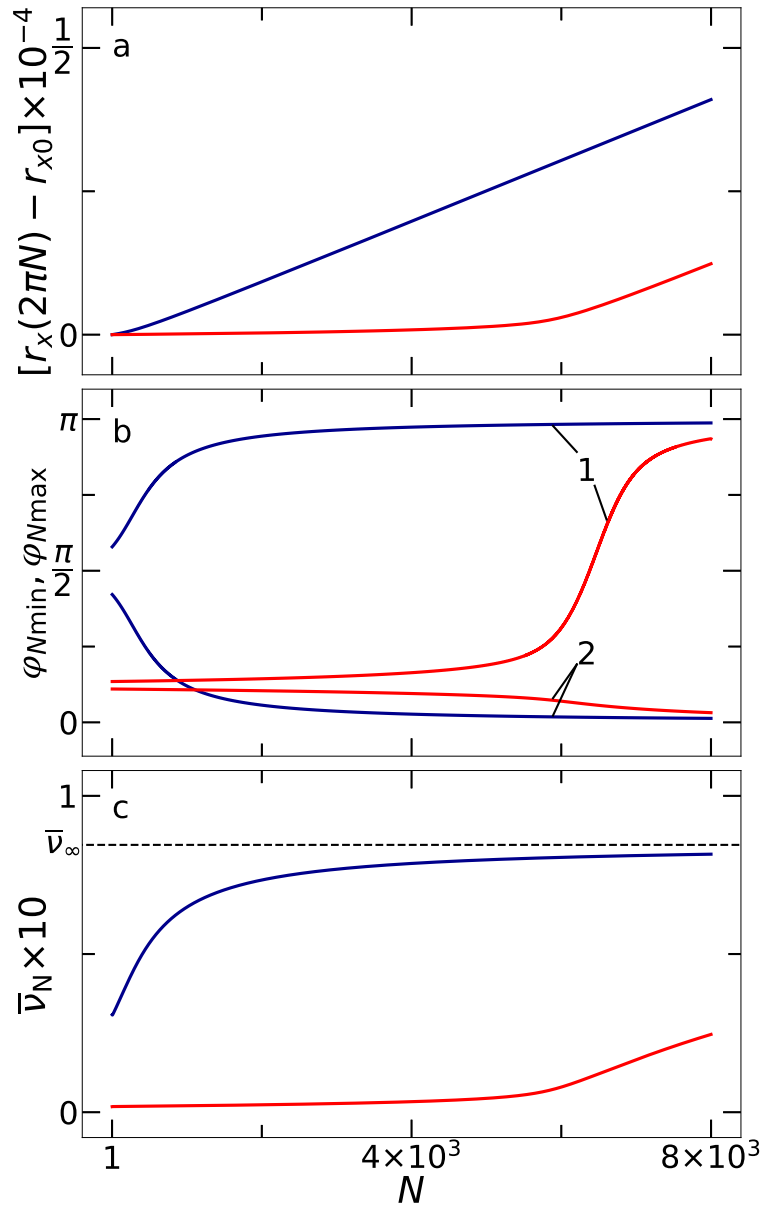


Рисунок 6.4 – Координата частинки  $r_x(2\pi N)$  після  $N$  періодів градієнтного магнітного поля (а), максимальне  $\varphi_{Nmax}$  (лінія 1) та мінімальне  $\varphi_{Nmin}$  (лінія 2) значення кута намагніченості (б) і середня швидкість дрейфу  $N$  частинки на  $N$ -му періоді (с). Ці результати отримані при  $\nu_g = 0.1$ ,  $\nu_\perp = 10$ ,  $r_{x0} = 50$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $\phi = \pi/5$  та  $\nu_\parallel = 0$  (сині лінії) і  $\nu_\parallel = 25$  (червоні лінії).



них параметрів маємо  $\bar{v}_1 = 3.1 \times 10^{-2}$  при  $\nu_{\parallel} = 0$  та  $\bar{v}_1 = 1.7 \times 10^{-3}$  при  $\nu_{\parallel} = 25$ . Як видно, якщо число  $N$  не надто велике, тоді  $\nu_{\parallel}$  сильно зменшує швидкість дрейфу. Але якщо  $N \rightarrow \infty$ , тоді швидкість дрейфу не залежить від  $\nu_{\parallel}$  і прямує до  $\bar{v}_{\infty} = 8.5 \times 10^{-2}$ . Зауважимо, однак, що чим більше  $\nu_{\parallel}$ , тим повільніше  $\bar{v}_N$  зростає зі збільшенням  $N$ .

## ВИСНОВКИ

В даній роботі була у детерміністичному наближенні розглянута зв'язана динаміка наночастинки як цілого та її намагніченості під дією зовнішнього циркулярно поляризованого магнітного поля. Ми ґрунтуємося на мікроскопічному підході та описанні всіх типів рухів за допомогою класичних рівнянь руху, модифікованих з врахуванням особливостей сумісного руху. Для цього використовується закон збереження повного моменту імпульсу та рівняння Ландау-Ліфшиця-Гільберта з видозміненим релаксаційним доданком задля врахування лише відносного руху магнітного моменту щодо кристалічної решітки наночастинки. У цьому підході описано низку режимів руху під дією обертового поля. Найбільш типовим є так званий режим однорідної прецесії, коли і вісь осі анізотропії наночастинки, і її магнітний момент виконують прецесійне обертання в межах поверхонь конусів з постійними кутами. Якщо прецесія стає нестабільною і полярний кут, принаймні, для одного з векторів починає зазнавати періодичних змін, і починає генеруватися так званий неоднорідним режимом. Аналогічний режим вже спостерігався та був описаний також для випадку фіксованої наночастинки та жорсткого диполя.

Був детально вивчений режим однорідної прецесії, що характеризується постійними кутами прецесії та постійними кутами відставання, значення яких залежать від параметрів наночастинки, поля та середовища. Отримано алгебраїчні рівняння для цих залежностей, розв'язки яких і характеризують вичерпно режим однорідної прецесії. Встановлено наступні основні властивості розв'язків зазначених алгебраїчних рівнянь. По-перше, магнітний момент наночастинок завжди становить менший кут із зовнішнім полем, ніж із віссю анізотропії. По-друге, прецесійна динаміка передбачає наявність деякого ефективного поля, аналогічного полю Барнета, перпендикулярного до площини поляризації поля, величина якого залежить від частоти змінного зовнішнього поля та напрямку його поляризації. Для достатньо великих частот зазначене ефективне поле є значним і може утримувати магнітний момент майже вздовж напрямку, який перпендикулярний до площині поляризації зовнішнього поля. Даний факт був підтверджений чисельно. У випадку зв'язаного руху для реалістичних значень

параметрів системи головною особливістю є невеликий кут конусу прецесії для легкої осі порівняно з конусом для магнітного моменту. Нарешті, отримано точний вираз для втрати потужності для випадку в'язкого обертання наночастинки зі скінченною анізотропією.

Неоднорідний режим є однією з пріоритетних цілей нашого дослідження. Оскільки точний аналітичний опис в даному випадку неможливий, було застосоване чисельне моделювання. Цей режим полягає в періодичних змінах полярних кутів як магнітного моменту, так і вісі анізотропії з періодом, який не кратний періоду зовнішнього поля. Активація неоднорідного режиму прецесії супроводжується змінами втрат потужності. На відміну від випадку фіксованої наночастинки, коли втрати потужності падають з початком генерування неоднорідного режиму, у випадку зв'язаного руху наночастинки з кінцевою анізотропією у в'язкому носії генерування режиму неоднорідної прецесії призводить до збільшення втрат потужності. Крім того, зв'язаний рух демонструє інший тип неоднорідної прецесії, що часто переходить у хаотичний. Цей вид руху спостерігається для досить широкого діапазону параметрів. Перемикання між ними та режимами інших типів також пов'язане з різкими змінами величини втрат потужності.

Також було зафіксовано щонайменше два нові режими, що генеруються циркулярно поляризованим полем, які не існують для спрощених випадків фіксованої наночастинки та жорсткого диполя. Перший новий режим - це хаотична прецесія, яка реалізується двома різними способами: чисто хаотичний, див. Рис. 3.4 та повільний хаотичний дрейф вісі анізотропії з умовно "регулярними" коливаннями магнітного моменту навколо тренду, див. Рис. 3.5. Другий новий режим можна вважати регулярним, і в його рамках повільний дрейф реалізується азимутальними кутами векторів магнітного моменту  $\mathbf{m}$  і та осі анізотропії  $\mathbf{n}$ , тоді як полярні кути цих векторів здійснюють регулярні коливання навколо осереднених значень.

Отримані результати дозволяють констатувати наступне. Різкі переходи між різними режимами прецесії є важливим явищем з точки зору контролю процесу нагрівання уражених тканин в методі терапії ракових пухлин, що зветься магнітною гіпертермією. З однієї сторони, це явище можна використовувати для вибору оптимальних параметрів для терапії.

З іншої сторони, варто тримати в полі зору, щоб запобігти небажаному перегріванню. Хоча наш підхід не враховує теплові флуктуації та взаємодію між наночастинками (яка реалізується диполь-дипольним способом), його актуальність досить значна. По-перше, як впливає з наближення жорсткого диполя, взаємодія та тепловий шум здатні лише пригнічувати відгук на зовнішнє поле та зменшувати потужність, що поглинається. Тому детермінований підхід встановлює граничні значення потужності втрат та швидкості нагрівання. По-друге, якщо розмір наночастинок досить великий ( $\sim 20$  нм), зовнішні поля досить інтенсивні, щоб магнітна енергія перевищувала теплову, регулярна складова в динаміці наночастинок буде домінувати над стохастичною і результати детерміністичного підходу будуть близькими до істинних.

Було встановлено та проаналізовано явище індукованого дисипацією обертання магніто-ізотропної наночастинки, зваженої у в'язкій рідині, та яка знаходиться під дією циркулярно поляризованого магнітного поля. У наближенні анізотропних наночастинок було описано як синхронну прецесію магнітного моменту наночастинки та наночастинки як цілого, так і випадки, коли швидкості зазначених прецесійних динамік не співпадають. Останній випадок яскраво простежується у випадку, коли параметр дисипації у рівнянні Ландау-Ліфшиця-Гільберта прямує до нуля. Саме це дозволяє зробити висновки, що причина обертання магніто-ізотропної наночастинки полягає саме у дисипаційному русі магнітного моменту наночастинки. Також показано, що у загальному випадку кутова швидкість обертання наночастинки буде нелінійно залежати від частоти зовнішнього поля. Зокрема, така залежність може як монотонно зростати до певного значення, так і мати форму унімодальної кривої з визначеним максимумом, положення якого визначається амплітудою поля.

Нарешті, було обговорено можливість експериментального підтвердження нашим теоретичним прогнозам щодо явища індукованого дисипацією обертання магніто-ізотропної наночастинки, викликаного обертовим зовнішнім полем. Оскільки пряме експериментальне вимірювання швидкості обертання наночастинки є вкрай ускладненим, запропоновано непряму методику, що передбачає більш простіше спостереження за динамікою

намагніченості системи наночастинок з визначеними параметрами у зовнішньому циркулярно поляризованому полі різної частоти та амплітуди. Порівнянням експериментальних залежностей намагніченості вздовж вісі, що перпендикулярна площині поляризації поля, з теоретичними передбаченнями для окремих частот та амплітуд можна здійснити задумане. Така можливість є наслідком сильного дисипаційного зв'язку між магнітною та решітковою підсистемами наночастинок у стаціонарному стані.

Також в рамках даного проєкту досліджено динаміку зважених у в'язкій рідині сильно анізотропних феромагнітних наночастинок. У випадку, коли такі частинки знаходяться під дією як постійного за часом однорідного магнітного поля, так і градієнтного магнітного поля, що змінюється з часом за гармонічним законом, отримано мінімальну систему рівнянь, які описують їх обертальний та поступальний рухи. У наближенні безінерційних і невзаємодіючих наночастинок ця система рівнянь складається з двох зв'язаних між собою нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку для азимутального кута вектора намагніченості і координати центра частинки. Шляхом аналітичного та чисельного розв'язання цієї системи рівнянь визначені обертальні та трансляційні властивості наночастинок, серед яких найбільш важливими є наступні.

У випадку, коли однорідне магнітне поле відсутнє, градієнтне магнітне поле індукує лише нерівномірне обертання наночастинок навколо їх початкової орієнтації та поступальні коливання наночастинок в околі їх рівноважних положень. При цьому як нерівномірне обертання, так і поступальні коливання відбуваються з частотою градієнтного поля. Для наночастинок, що розташовані поблизу початку координат (де градієнтне магнітне поле дорівнює нулю), амплітуда кута обертання прямує до нуля, тоді як на далеких відстанях від нього кут обертання лежить в інтервалі  $(0, \pi)$ .

Якщо однорідне магнітне поле має лише компоненту, паралельну до напрямку градієнтного поля, тоді кут намагніченості і координата кожної частинки прямують з часом до одного з двох стаціонарних станів. В цих станах намагніченість направлена вздовж (проти) напрямку градієнтного поля, а наночастинки виконують однакові поступальні коливання з частотою цього поля. Стаціонарні стани встановлюються протягом деякого часу,

який сильно зменшується зі збільшенням величини паралельної компоненти однорідного магнітного поля.

Нарешті, найбільш вагомим результатом роботи є передбачення ефекту спрямованого транспорту або дрейфу зважених феромагнітних наночастинок. Його суть полягає у тому, що при наявності перпендикулярної компоненти однорідного поля виникає додаткове зміщення наночастинок протягом кожного періоду градієнтного поля, яке відбувається внаслідок динамічного зв'язку між їх обертальними і поступальними рухами. При цьому практично всі частинки дрейфують, віддаляючись від початку координат в протилежні сторони. Основна характеристика дрейфового руху наночастинок – середня швидкість дрейфу – визначена аналітично як для частинок поблизу початку координат, так і для частинок, що розташовані на далеких відстанях від початку координат.

Досліджені транспортні властивості наночастинок в градієнтних магнітних полях можуть бути використані для сепарації клітин та адресної доставки ліків. Оскільки змінне у часі градієнтне магнітне поле призводить як до нагрівання наночастинок, так і до їх переміщення, отримані результати можуть бути корисними і для гіпертермії.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Gleich Bernhard, Weizenecker Jürgen. Tomographic imaging using the nonlinear response of magnetic particles // *Nature*. — 2005. — Vol. 435. — P. 1214 – 1217. — Access mode: <https://doi.org/10.1038/nature03808>.
2. Progress in applications of magnetic nanoparticles in biomedicine / Q A Pankhurst, N T K Thanh, S K Jones, J Dobson // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2009. — Vol. 42, no. 22. — P. 224001. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0022-3727/42/i=22/a=224001>.
3. Magnetic fluid hyperthermia: Focus on superparamagnetic iron oxide nanoparticles / Sophie Laurent, Silvio Dutz, Urs O. Hafeli, Morteza Mahmoudi // *Adv. Colloid Interface Sci.* — 2011. — Vol. 166, no. 1. — P. 8 – 23. — Access mode: <https://doi.org/10.1016/j.cis.2011.04.003>.
4. Fundamentals and advances in magnetic hyperthermia / E. A. Périgo, G. Hemery, O. Sandre et al. // *Appl. Phys. Rev.* — 2015. — Vol. 2, no. 4. — P. 041302. — Access mode: <https://doi.org/10.1063/1.4935688>.
5. Magnetic nanoparticles for drug delivery / Manuel Arruebo, Rodrigo Fernández-Pacheco, M. Ricardo Ibarra, Jesús Santamaría // *Nano Today*. — 2007. — Vol. 2, no. 3. — P. 22 – 32. — Access mode: [https://doi.org/10.1016/S1748-0132\(07\)70084-1](https://doi.org/10.1016/S1748-0132(07)70084-1).
6. Targeted Drug Delivery with Polymers and Magnetic Nanoparticles: Covalent and Noncovalent Approaches, Release Control, and Clinical Studies / Karel Ulbrich, Katerina Hola, Vladimir Subr et al. // *Chem. Rev.* — 2016. — Vol. 116, no. 9. — P. 5338–5431. — Access mode: <https://doi.org/10.1021/acs.chemrev.5b00589>.
7. Continuous microfluidic immunomagnetic cell separation / David W. Inglis, R. Riehn, R. H. Austin, J. C. Sturm // *Appl. Phys. Lett.* — 2004. — Vol. 85, no. 21. — P. 5093–5095. — Access mode: <https://doi.org/10.1063/1.1823015>.
8. Hejazian Majid, Li Weihua, Nguyen Nam-Trung. Lab on a chip for continuous-flow magnetic cell separation // *Lab*

- Chip. — 2015. — Vol. 15. — P. 959–970. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1039/C4LC01422G>.
9. Dalili Arash, Samiei Ehsan, Hoorfar Mina. A review of sorting, separation and isolation of cells and microbeads for biomedical applications: microfluidic approaches // *Analyst*. — 2019. — Vol. 144. — P. 87–113. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1039/C8AN01061G>.
  10. Effective mixing in a microfluidic chip using magnetic particles / Seung Hwan Lee, Danny van Noort, Ji Youn Lee et al. // *Lab Chip*. — 2009. — Vol. 9. — P. 479–482. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1039/B814371D>.
  11. Selective and directional actuation of elastomer films using chained magnetic nanoparticles / Sumeet R. Mishra, Michael D. Dickey, Orlin D. Velev, Joseph B. Tracy // *Nanoscale*. — 2016. — Vol. 8. — P. 1309–1313. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1039/C5NR07410J>.
  12. Conducting ferrofluid: a high-performance microwave shielding material / Monika Mishra, Avanish Pratap Singh, B. P. Singh et al. // *J. Mater. Chem. A*. — 2014. — Vol. 2. — P. 13159–13168. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1039/C4TA01681E>.
  13. Designing Of MWCNT/ Ferrofluid/ Flyash Multiphase Composite As Safeguard For Electromagnetic Radiation / Pradeep Sambyal, Avanish Pratap Singh, Meenakshi Verma et al. // *Adv. Mater. Lett.* — 2015. — Vol. 6. — P. 585–591. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.5185/amlett.2015.5807>.
  14. Microwave shielding properties of Co/Ni attached to single walled carbon nanotubes / B. P. Singh, D. K. Saket, A. P. Singh et al. // *J. Mater. Chem. A*. — 2015. — Vol. 3. — P. 13203–13209. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1039/C5TA02381E>.
  15. Varshney Swati, Dhawan S. K. Improved Electromagnetic Shielding Performance of Lightweight Compression Molded Polypyrrole/Ferrite Composite Sheets // *Journal of Electronic Materials*. — 2017. — Mar. — Vol. 46, no. 3. — P. 1811–1820.
  16. Varshney Swati, Dhawan S.K. Designing of Materials for EMI Shielding Applications // *Microwave Materials and Applications 2V*



- Set. — Hoboken, New Jersey, USA : John Wiley & Sons, Inc., 2017. — P. 575–602. — ISBN: 9781119208549. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1002/9781119208549.ch13>.
17. Rosensweig R.E. Heating magnetic fluid with alternating magnetic field // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 2002. — Vol. 252. — P. 370 – 374. — Proceedings of the 9th International Conference on Magnetic Fluids. Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885302007060>.
  18. Effects of magnetic dipolar interactions on the specific time constant in superparamagnetic nanoparticle systems / N Iacob, G Schinteie, C Bartha et al. // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2016. — Vol. 49, no. 29. — P. 295001. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0022-3727/49/i=29/a=295001>.
  19. Relevant Parameters for Magnetic Hyperthermia in Biological Applications: Agglomeration, Concentration, and Viscosity / Y. Piñeiro, Z. Vargas-Osorio, M. Bañobre López et al. // *IEEE Transactions on Magnetics*. — 2016. — Vol. 52, no. 7. — P. 2300704. — Access mode: <http://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7381656/>.
  20. Trisnanto Suko Bagus, Kitamoto Yoshitaka. Brownian particle-kinetics in a superparamagnetic ferrofluid subjected to static magnetic-field // *AIP Conference Proceedings*. — 2017. — Vol. 1807, no. 1. — P. 020021. — <http://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4974803>.
  21. Improving the magnetic heating by disaggregating nanoparticles / F. Arteaga-Cardona, K. Rojas-Rojas, R. Costo et al. // *Journal of Alloys and Compounds*. — 2016. — Vol. 663, no. Supplement C. — P. 636 – 644. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925838815315413>.
  22. Predictable Heating and Positive MRI Contrast from a Mesoporous Silica-Coated Iron Oxide Nanoparticle / Katie R. Hurley, Hattie L. Ring, Michael Etheridge et al. // *Molecular Pharmaceutics*. — 2016. — Vol. 13, no. 7. — P. 2172–2183. — PMID: 26991550. <http://dx.doi.org/10.1021/acs.molpharmaceut.5b00866>.
  23. Size-Dependent Heating of Magnetic Iron Oxide Nanoparticles / Sheng Tong, Christopher A. Quinto, Linlin Zhang et al. // *ACS*

- Nano. — 2017. — Vol. 11, no. 7. — P. 6808–6816. — PMID: 28625045.  
<http://dx.doi.org/10.1021/acs.nano.7b01762>.
24. Effective heating of magnetic nanoparticle aggregates for in vivo nanotheranostic hyperthermia / C Wang, C H Hsu, Z Li et al. // Int. J. Nanomedicine. — 2017. — Aug. — Vol. 12. — P. 6273–6287. — Access mode: <https://doi.org/10.2147/IJN.S141072>.
25. Lee Sanghoon, Jeun Minhong. Size Dependence of Alternating Current Magnetically-Induced Heating Characteristics of Ferrimagnetic  $MgFe_2O_4$  Nanoparticles in Powder and Fluidic States // Sci. Adv. Mater. — 2017. — May. — Vol. 9. — P. 804–809. — Access mode: <https://doi.org/10.1166/sam.2017.2948>.
26. Tsebers A. O. Simultaneous rotational diffusion of the magnetic moment and the solid matrix of a single-domain ferromagnetic particle // Magnetohydrodynamics. — 1975. — Vol. 11, no. 3. — P. 273–278. — Access mode: <http://mhd.sal.lv/contents/1975/3/MG.11.3.2.R.html>.
27. Precessional dynamics of single-domain magnetic nanoparticles driven by small ac magnetic fields / Haiwen Xi, Kai-Zhong Gao, Yiming Shi, Song Xue // Journal of Physics D: Applied Physics. — 2006. — nov. — Vol. 39, no. 22. — P. 4746–4752. — Access mode: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/39/22/002>.
28. Cīmurs J., Cēbers A. Dynamics of anisotropic superparamagnetic particles in a precessing magnetic field // Phys. Rev. E. — 2013. — Jun. — Vol. 87. — P. 062318. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.87.062318>.
29. Magnetomechanical coupling and ferromagnetic resonance in magnetic nanoparticles / Hedyeh Keshtgar, Simon Streib, Akashdeep Kamra et al. // Phys. Rev. B. — 2017. — Apr. — Vol. 95. — P. 134447. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.134447>.
30. Usov N.A., Liubimov B. Ya. Magnetic nanoparticle motion in external magnetic field // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2015. — Vol. 385. — P. 339 – 346. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885315002565>.
31. Usadel K. D., Usadel C. Dynamics of magnetic single domain particles

- embedded in a viscous liquid // *Journal of Applied Physics*. — 2015. — Vol. 118, no. 23. — P. 234303. — <http://dx.doi.org/10.1063/1.4937919>.
32. Lyutyy T. V., Hryshko O. M., Kovner A. A. Power loss for a periodically driven ferromagnetic nanoparticle in a viscous fluid: The finite anisotropy aspects // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 2018. — Vol. 446, no. Supplement C. — P. 87 – 94. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885317310740>.
33. Precession of a Fine Magnetic Particle with Finite Anisotropy in a Viscous Fluid / T. V. Lyutyy, O. M. Hryshko, A. A. Kovner, E. S. Denisova // *J. Nano- Electron. Phys.* — 2016. — Vol. 8, no. 4. — P. 04086. — Access mode: [https://dx.doi.org/10.21272/jnep.8\(4\(2\)\).04086](https://dx.doi.org/10.21272/jnep.8(4(2)).04086).
34. Lyutyy T.V., Hryshko O.M., Yakovenko M.Yu. Uniform and nonuniform precession of a nanoparticle with finite anisotropy in a liquid: Opportunities and limitations for magnetic fluid hyperthermia // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 2019. — Vol. 473. — P. 198 – 204. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885318322868>.
35. Usadel Klaus D. Dynamics of magnetic nanoparticles in a viscous fluid driven by rotating magnetic fields // *Phys. Rev. B*. — 2017. — Mar. — Vol. 95. — P. 104430. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.104430>.
36. Berkov D. V., Iskakova L. Yu., Zubarev A. Yu. Theoretical study of the magnetization dynamics of nondilute ferrofluids // *Phys. Rev. E*. — 2009. — Feb. — Vol. 79. — P. 021407. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.79.021407>.
37. Yu. L. Raikher, Stepanov V. I. Power losses in a suspension of magnetic dipoles under a rotating field // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Feb. — Vol. 83. — P. 021401. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.021401>.
38. Large-scale ferrofluid simulations on graphics processing units / A.Yu. Polyakov, T.V. Lyutyy, S. Denisov et al. // *Computer Physics Communications*. — 2013. — Vol. 184, no. 6. — P. 1483 – 1489. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465513000337>.
39. Rotational properties of ferromagnetic nanoparticles driven by a

- precessing magnetic field in a viscous fluid / T. V. Lyutyy, S. I. Denisov, V. V. Reva, Yu. S. Bystrik // Phys. Rev. E. — 2015. — Oct. — Vol. 92. — P. 042312. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.042312>.
40. Lyutyy T. V., Reva V. V. Energy dissipation of rigid dipoles in a viscous fluid under the action of a time-periodic field: The influence of thermal bath and dipole interaction // Phys. Rev. E. — 2018. — May. — Vol. 97. — P. 052611. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.052611>.
41. Wang Zuwei, Holm Christian, Müller Hanns Walter. Molecular dynamics study on the equilibrium magnetization properties and structure of ferrofluids // Phys. Rev. E. — 2002. — Aug. — Vol. 66. — P. 021405. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.66.021405>.
42. Magnetic properties of polydisperse ferrofluids: A critical comparison between experiment, theory, and computer simulation / Alexey O. Ivanov, Sofia S. Kantorovich, Evgeniy N. Reznikov et al. // Phys. Rev. E. — 2007. — Jun. — Vol. 75. — P. 061405. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.75.061405>.
43. Sreekumari Aparna, Ilg Patrick. Slow relaxation in structure-forming ferrofluids // Phys. Rev. E. — 2013. — Oct. — Vol. 88. — P. 042315. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.88.042315>.
44. Landi Gabriel T. Role of dipolar interaction in magnetic hyperthermia // Phys. Rev. B. — 2014. — Jan. — Vol. 89. — P. 014403. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.014403>.
45. Denisov S. I., Pedchenko B. O., Pavlyuk M. O. Unidirectional Transport of Ferromagnetic Particles in a Viscous Liquid Induced by the Magnus Force // J. Nano- Electron. Phys. — 2016. — Vol. 8, no. 4(2). — P. 04087. — Access mode: [https://doi.org/10.21272/jnep.8\(4\(2\)\).04087](https://doi.org/10.21272/jnep.8(4(2)).04087).
46. Denisov S. I., Pedchenko B. O. Drift of suspended ferromagnetic particles due to the Magnus effect // Journal of Applied Physics. — 2017. — Vol. 121, no. 4. — P. 043912. — <https://doi.org/10.1063/1.4975031>.
47. Exactly solvable model for drift of suspended ferromagnetic particles induced by the Magnus force / S.I. Denisov, B.O. Pedchenko,

- O.V. Kvasnina, E.S. Denisova // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2017. — Vol. 443. — P. 89 – 95. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885317316530>.
48. Temperature effects on drift of suspended single-domain particles induced by the Magnus force / S. I. Denisov, T. V. Lyutyy, V. V. Reva, A. S. Yermolenko // Phys. Rev. E. — 2018. — Mar. — Vol. 97. — P. 032608. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.032608>.
49. Svoboda J. Magnetic Techniques for the Treatment of Materials. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.
50. Denisov S I, Lyutyy T V, Pavlyuk M O. Directed transport of suspended ferromagnetic nanoparticles under both gradient and uniform magnetic fields // Journal of Physics D: Applied Physics. — 2020. — jul. — Vol. 53, no. 40. — P. 405001. — Access mode: <https://doi.org/10.1088/1361-6463/ab97da>.
51. Forced Precession of a Ferromagnetic Nanoparticle with a Finite Anisotropy Suspended in a Liquid: Nonlinear Aspects / T. V. Lyutyy, V. V. Reva, N. S. Petrenko, M. O. Pavlyuk // J. Nano- Electron. Phys. — 2019. — Vol. 11, no. 5. — P. 05021. — Access mode: [https://doi.org/10.21272/jnep.11\(5\).05021](https://doi.org/10.21272/jnep.11(5).05021).
52. Lyutyy T. V., Denisov S. I., Hänggi P. Dissipation-induced rotation of suspended ferromagnetic nanoparticles // Phys. Rev. B. — 2019. — Oct. — Vol. 100. — P. 134403. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.100.134403>.
53. Denisov S. I., Lyutyy T. V., Liutyi A. T. Dynamics of Suspended Nanoparticles in a Time-varying Gradient Magnetic Field: Analytical Results // J. Nano- Electron. Phys. — 2020. — Vol. 12, no. 6. — P. 06028. — Access mode: [https://doi.org/10.21272/jnep.12\(6\).06028](https://doi.org/10.21272/jnep.12(6).06028).
54. Denisov S I, Lyutyy T V, Liutyi A T. Drift of suspended single-domain nanoparticles in a harmonically oscillating gradient magnetic field // Journal of Physics D: Applied Physics. — 2021. — oct. — Vol. 55, no. 4. — P. 045001. — Access mode: <https://doi.org/10.1088/1361-6463/ac2db6>.
55. Gilbert T. L. A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials // IEEE Transactions on Magnetics. — 2004. — Nov. — Vol. 40, no. 6. —

- P. 3443–3449. — Access mode: <https://doi.org/10.1109/TMAG.2004.836740>.
56. Energy dissipation in single-domain ferromagnetic nanoparticles: Dynamical approach / T. V. Lyutyy, S. I. Denisov, A. Yu. Peletskyi, C. Binns // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Feb. — Vol. 91. — P. 054425. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.054425>.
57. Dar M. Ibrahim, Shivashankar S. A. Single crystalline magnetite, maghemite, and hematite nanoparticles with rich coercivity // *RSC Adv.* — 2014. — Vol. 4. — P. 4105–4113. — Access mode: <http://dx.doi.org/10.1039/C3RA45457F>.
58. Shliomis M I. Magnetic fluids // *Soviet Physics Uspekhi.* — 1974. — Vol. 17, no. 2. — P. 153. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0038-5670/17/i=2/a=R02>.
59. Brown William Fuller. Thermal Fluctuations of a Single-Domain Particle // *Phys. Rev.* — 1963. — Jun. — Vol. 130. — P. 1677–1686. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.1677>.
60. Denisov S.I, Yunda A.N. Thermal-induced inversion of the magnetic moment in superparamagnetic particles // *Physica B: Condensed Matter.* — 1998. — Vol. 245, no. 3. — P. 282–287. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921452697008788>.
61. Newman J. J., Yarbrough R. B. Motions of a Magnetic Particle in a Viscous Medium // *Journal of Applied Physics.* — 1968. — Vol. 39, no. 12. — P. 5566–5569. — <https://doi.org/10.1063/1.1656014>.
62. Weizenecker Jürgen. The Fokker-Planck Equation for Coupled Brown-Néel-Rotation // *Physics in Medicine and Biology.* — 2018. — Vol. 63, no. 3. — P. 035004. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0031-9155/63/i=3/a=035004>.
63. Bertotti Giorgio, Serpico Claudio, Mayergoyz Isaak D. Nonlinear Magnetization Dynamics under Circularly Polarized Field // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Jan. — Vol. 86. — P. 724–727. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.724>.
64. Switching properties of ferromagnetic nanoparticles driven by a circularly polarized magnetic field / T V Lyutyy, A Yu Polyakov, A V Rotserov, C Binns // *Journal of Physics: Condensed Matter.* — 2009. —

- Vol. 21, no. 39. — P. 396002. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0953-8984/21/i=39/a=396002>.
65. Phase diagrams for the precession states of the nanoparticle magnetization in a rotating magnetic field / S.I. Denisov, T.V. Lyutyy, C. Binns, P. Hanggi // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 2010. — Vol. 322, no. 9. — P. 1360 – 1362. — *Proceedings of the Joint European Magnetic Symposia*. Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885309009330>.
66. Lyutyy T. V. Dynamics and energy dissipation of a rigid dipole driven by the RF-field in a viscous fluid: Deterministic approach // *The European Physical Journal E*. — 2018. — Dec. — Vol. 41, no. 12. — P. 142. — Access mode: <https://doi.org/10.1140/epje/i2018-11756-x>.
67. Álvarez Luis Fernández, Pla Oscar, Chubykalo Oksana. Quasiperiodicity, bistability, and chaos in the Landau-Lifshitz equation // *Phys. Rev. B*. — 2000. — May. — Vol. 61. — P. 11613–11617. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.61.11613>.
68. Chaotic dynamics of a magnetic nanoparticle / J. Bragard, H. Pleiner, O. J. Suarez et al. // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Sep. — Vol. 84. — P. 037202. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.84.037202>.
69. Vagin D. V., Polyakov O. P. Control of chaotic and deterministic magnetization dynamics regimes by means of sample shape varying // *Journal of Applied Physics*. — 2009. — Vol. 105, no. 3. — P. 033914. — <https://doi.org/10.1063/1.3075838>.
70. Guimarães A. P. *Principles of Nanomagnetism*. — 2nd edition. — Springer, New York, 2017. — Access mode: <https://www.springer.com/gp/book/9783642261114>.